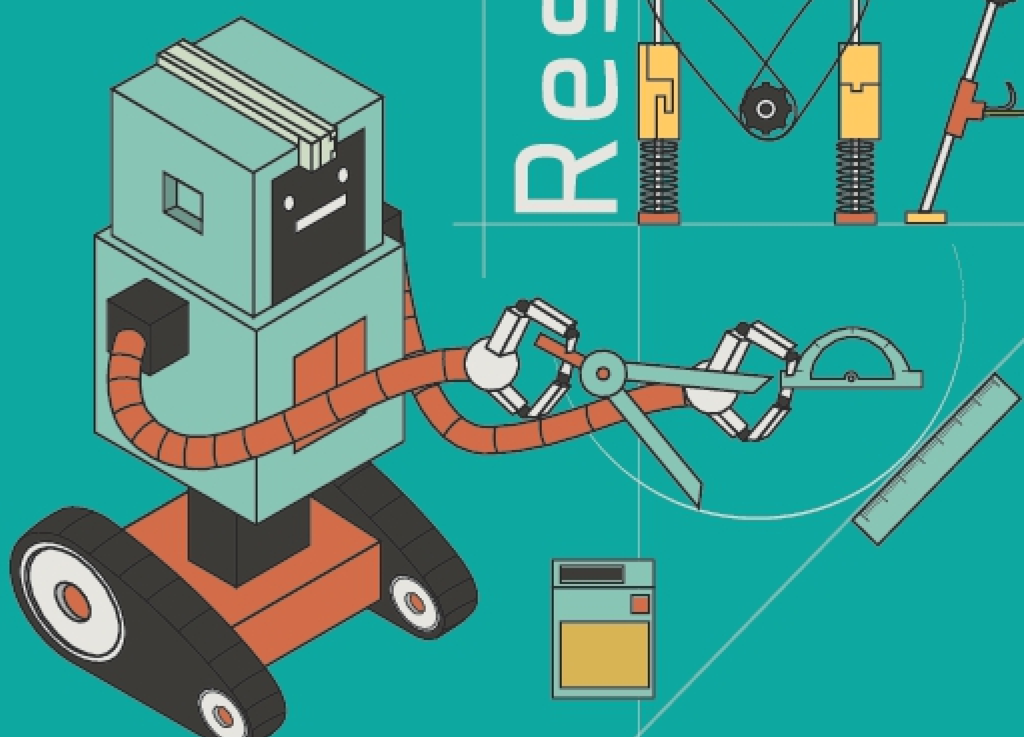
Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Tercer ciclo y Bachillerato

Resolución de PROBLEMAS



Ministerio de Educación

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Resolución de problemas matemáticos para Tercer Ciclo y Educación Media

Plan Social Educativo

Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Franzi Hasbún Barake

Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega

Viceministra de Ciencia y Tecnología

William Ernesto Mejía

Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya

Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez

Jefe de Educación Media en CTI

Oscar de Jesús Águila Chávez, José Carlos Márquez Hernández, Roberto Arqueta Quan.

Dirección del Esfuerzo Editorial

Oscar de Jesús Águila Chávez, José Carlos Márquez Hernández, Roberto Arqueta Quan, Félix Abraham Guevara, Reina Maritza Pleitez, Norma Yolibeth López de Bermúdez.

Equipo de Redacción, Edición, Diagramación y Edición.

Oscar de Jesús Águila Chávez, José Carlos Márquez Hernández, Carlos Rodolfo González, Herbert Ronald Chicas, José María Portillo, Jonatán Aníbal Guevara, Leonel Eduardo Amaya Barrera, Roberto Argueta Quan, Sergio Rodolfo Martínez, Félix Abraham Guevara, Veronica Martir Masferrer, Carmen Sonia Bran Arevalo, Arely del Carmen Lemus de Herrera, Alma Desiree Denys Guadron, Héctor Edgardo Molina, Edgardo Danilo Hernández, Armida Yanira Reyes, José Orlando Salas Melara, Judith Beatriz Villalta, José Natanael Cortez, Edgardo Antonio Ramos, Samuel Ochoa Martínez.

Autores

Sergio Armando Márquez Hernández.

Diseño de Portada y Contraportada

Edición Preliminar

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central.

Teléfonos: (503) 2510-4217, (503) 2510-4218, (503) 2510-4219,

Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv

Índice

Presentación

El presente texto sobre resolución de problemas matemáticos para docentes, tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática en Tercer Ciclo y Educación Media en El Salvador. En su elaboración se destaca la participación de docentes salvadoreños, miembros de la *Red de Docentes para la Resolución de Problemas Matemáticos (RESPROMAT)*, quienes han enriquecido el proceso con sus sugerencias y propuestas.

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología de El Salvador, a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y el subprograma "Hacia la CYMA", que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular a docentes de Tercer Ciclo de Educación Básica.

La socialización de la estrategia de participación de docentes en este proceso de creación de materiales tiene la posibilidad de ser una plataforma de construcción de conocimientos bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se fortalecen las competencias matemáticas necesarias que debe tener cada docente para alcanzar el desarrollo de capacidades básicas valiosas para el proceso de enseñanza- aprendizaje, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos.

La resolución de problemas es clave para el avance de la internalización de estrategias idóneas para una formación de calidad en Matemática, porque integra las estrategias, algoritmos y procesos de pensamiento. Con este propósito se ha elaborado este material de 100 problemas de aritmética y álgebra básica para fortalecer las capacidades de investigación, innovación y creación de docentes de Tercer Ciclo y Educación Media. El material está diseñado para ser utilizado como componente de enriquecimiento, introducción o cierre de un tema, valorando en cada caso el momento oportuno para la generación de estrategias claves para el desarrollo de pensamiento lógico.

Introducción

Desde asegurar la subsistencia cotidiana hasta abordar los más complejos desafíos derivados de la ciencia y la tecnología, sin excepción, todas las personas resolvemos problemas. La importancia de la resolución de problemas es evidente. En definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[1], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debe extrañarnos que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales en psicología, ingeniería, física, química, negocios, etc.

En cuanto a la enseñanza de la Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas. ¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está un estudiante resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel del docente en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se puede resolver o no. Comúnmente se aplica un algoritmo que el estudiante puede conocer o ignorar. Una vez encontrado el algoritmo, se aplica y se obtiene la solución del problema y esta se aplica a los demás ejercicios del mismo tipo.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en las lecciones de Matemática ha desarrollado y penetrado en los estudiantes como un síndrome generalizado. En cuanto se le plantea una tarea a realizar, tras una simple

---

[1] *Nieto Said, José Heber (2004). Resolución de Problemas Matemáticos, Venezuela.*

reflexión, trata de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Para resolverlos es necesario relacionar saberes procedentes de campos diferentes y generar nuevas relaciones entre estos. El papel del docente es proporcionar a sus estudiantes la posibilidad de desarrollar hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué sirve hacer un hueco en su mente donde quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades, con poco significado para el estudiante, si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas. Ahí es donde se puede advertir el atractivo que hallaron en ella académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas resultan motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo de herramientas, en fin, la vida propia de la Matemática[2]. Por estas razones algunos matemáticos han dedicado su tiempo al estudio de la resolución de problemas por sí misma.

La resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada en década de los años cuarenta del siglo veinte, por el matemático húngaro George Polya[3]. La aludida fase consiste en: comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado. Por supuesto no sólo basta conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente es importante enseñar al estudiante a utilizar las estrategias conocidas. Con esto nos ubicamos en un nivel meta-cognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y el resto. Trabajar a este nivel implica desarrollar la capacidad que tienen los estudiantes de autorregular su propio aprendizaje. Esto implica la capacidad de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso,

---

[2] *De Guzmán Ozámiz, Miguel de Guzmán Ozámir (1936 - 2004), matemático español.*

[3] *George Pólya (1887-1985) en How to solve it. Pricenton University Press.*

evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[4].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se consigue que el estudiante se capaz de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Por ello recomendamos establecer problemas ante los cuales el grupo no sepa qué hacer en un primer intento. Con esto conseguiremos atraer su atención, curiosidad y motivación, para que luego se implique en el proceso de resolución de problemas.

Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de lograr que el estudiante visualice el problema utilizando materiales concretos, que los manipulen, pues la manipulación es un proceso muy útil para construir en los estudiantes las abstracciones necesarias para el estudio de las ciencias en general.

Finalmente, recordemos que, según Schoenfeld, aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia. Incluye también ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina. Significa usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas del juego.

[4] Schoenfeld, Allan (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Pres.

Uso del Libro en el Aula

El libro sobre resolución de problemas es un complemento que permitirá a cada docente tener una herramienta de apoyo para su práctica en el aula mediante la incorporación de propuestas de problemas matemáticos en el área de algebra y aritmética, ya sea al final de un tema o como introducción del mismo.

Lo esencial es que docente y estudiante acumulen el mayor número de estrategias que les permitan evolucionar en procesos de pensamiento matemático. Se sugiere que el libro sea utilizado en el nivel de Tercer Ciclo y Educación Media aunque podría utilizarse en algunos casos dosificando el contenido a nivel de Segundo Ciclo.

Cada docente deberá primeramente leer los problemas e intentar resolverlos, recordando que un problema necesita determinación y estrategia; seguidamente puede recurrir a la lectura de la matriz de información de problemas para conocer las estrategias y pre saberes necesarios para entrar en el proceso de solución y como último recurso deberá leer la solución.

El libro tiene la enorme ventaja de que su punto de partida es la integración de procesos de desarrollo de competencias matemáticas fundamentales, como lo son: conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiantado puede adquirir al finalizar la lección, es decir, se pretende que con ayuda docente desarrolle las competencias esenciales en Matemática para una formación científica de calidad y con capacidad de innovación.

Dichas competencias son:

i. Saber argumentar.

ii. Saber cuantificar.

iii. Saber analizar críticamente la información.

iv. Saber representar y comunicar.

v. Saber enfrentar y resolver problemas.

Estructura del Libro

Para una mejor compresión, El capítulo 0 de este libro contiene una breve colección de diferentes estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizados a lo largo del texto. Los contenidos de este libro, en los capítulos 1 y 2, están estructurados en el siguiente orden:

- **Lista de Problemas I: Aritmética.** Se proponen 50 problemas, de en su mayoría vinculados al uso de la aritmética que tienen diferentes niveles de complejidad y áreas
- **Matriz de identificación de pre saberes y ubicación en el programa de Tercer Ciclo y Educación Media.** En esta matriz se reflejan las necesidades en términos de pre saberes, estrategia y ubicación en el programa lo que posibilita inducir su uso como tareas, actividad relevante, discusión guiada para fundamentar procesos de pensamiento lógico, argumentación y reflexión en la acción de procesos y estrategias de resolución de problemas.
- **Solución de problemas.** En este apartado se encuentran las soluciones de los problemas propuestos para hacer una lectura reflexiva sobre las estrategias utilizadas en el proceso de solución.
- **Lista de Problemas II: Álgebra.** Se proponen 50 problemas, en su mayoría de algebra, que tienen diferentes niveles de complejidad y áreas.
- **Matriz de identificación de pre saberes y ubicación en el programa de Tercer Ciclo y Educación Media.** En esta matriz se reflejan las necesidades en términos de pre saberes, estrategia y ubicación en el programa, lo que posibilita inducir su uso como tareas, actividad relevante, discusión guiada para fundamentar procesos de

pensamiento lógico, argumentación y reflexión en la acción de procesos y estrategias de resolución de problemas.

- **Soluciones de problemas.** En este apartado se encuentran las soluciones de los problemas propuestos para hacer una lectura reflexiva sobre las estrategias utilizadas en el proceso de solución.

Capítulo 0

Estrategias de Resolución de Problemas Matemáticos

En este libro hacemos uso de diferentes estrategias para la resolución de problemas. Estas son útiles para entrar en procesos reflexión matemática y pensamiento lógico. A continuación presentamos una lista de algunas de estas estrategias. Consideramos que el estudio de estas estrategias puede ayudar al lector a incrementar sus capacidades de resolución de problemas y a obtener mejor beneficio de los problemas abordados en este libro.

Simplificación y Búsqueda de Patrones

Se conoce como patrón a una sucesión de signos que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia[5]. Muchas veces al resolver un

[5] http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/diseno_desarrollo/matematica3.pdf (Consultado junio de 2013)

problema, sus condiciones evidencian la existencia de patrones o regularidades. Estas permiten establecer posibilidades de solución muy originales y creativas.

Las ciencias casi en forma unánime se construyen sobre la búsqueda de patrones. Por lo tanto debemos priorizar su descubrimiento en el proceso de formación de competencias matemáticas. En este documento se hace uso de estas estrategias para resolver varios problemas propuestos. Entre los patrones identificados a lo largo de la propuesta encontraremos:

- Patrones geométricos
- Patrones numéricos
- Patrones por repetición
- Patrones por recurrencia

Es necesario tener presente que los patrones son un tema de carácter transversal con respecto a otros contenidos Matemáticos y de otras disciplinas.

El proceso de "hacer" matemática es más que cálculo y deducción. También involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas y la estimación de resultados.

Los patrones se pueden encontrar desde las tablas de las operaciones aritméticas, los sistemas de numeración y las sucesiones de números, entre estos los números pares, impares, primos, compuestos, cuadrados.

Finalmente, hay que considerar que resolver problemas implica un rico y conectado entendimiento de la matemática y la habilidad de ver patrones de similitud y asociación.

También implica destrezas para llevar a cabo un plan de solución y revisar que los resultados tengan sentido en el contexto del problema (Burkhardt & Bell, 2007, p. 395).

Ejemplos de Búsqueda de Patrones

Ejemplo 0.1.

Hallar la suma de las cifras de $M = 5 * \underbrace{888\ldots88}_{2013\ cifras}$

Solución del Ejemplo 0.1.

Calculemos el resultado para algunos casos particulares.

$5*8 = 40 \Longrightarrow 4 + 0 = 1(4) + 0 = 4$, es la suma de las cifras.

$5*88 = 440 \Longrightarrow 4 + 4 + 0 = 2(4) + 0 = 8$, es la suma de las cifras.

$5*888 = 4440 \Longrightarrow 4 + 4 + 4 + 0 = 3(4) + 0 = 12$, es la suma de la cifras.

Ahora podemos determinar que la suma de los dígitos es el producto de la cantidad de dígitos 8 en el segundo factor multiplicada por 4.

Es decir, que $\mathrm{M} = 5*\underbrace{888\ldots88}_{2013\,cifras} \Longrightarrow (2013)4 + 0 = 8052$ es la suma de las cifras.

Ejemplo 0.2.

Hallar la suma de los dígitos del resultado de $\mathrm{N} = \sqrt{\underbrace{444\ldots444}_{4028\ veces} - \underbrace{888..888}_{2014\,veces}}$

Solución del Ejemplo 0.2.

Notemos que $\sqrt{44-8} = \sqrt{36} = 6$, indica que la suma de las cifras es 6.

$\sqrt{4444-88} = \sqrt{4356} = 66$, indica que la suma de las cifras es $2(6) = 12$.

$\sqrt{444444-888} = \sqrt{443556} = 666$, indica que la suma de las cifras es $3(6) = 18$.

$\sqrt{44444444-8888} = \sqrt{44435556} = 6666$, indica que la suma de las cifras es $4(6) = 24$. Notemos entonces que se evidencia un patrón.

El número de ochos multiplicado por seis es la suma de los dígitos del resultado final. Por lo tanto, el número de dígitos de la cantidad $\sqrt{\underbrace{444\ldots444}_{4028\ veces} - \underbrace{888..888}_{2014\,veces}}$ es $2014(6) = 120$.

Ensayo y Error

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta. Usualmente tiene el inconveniente de que es un proceso tedioso pero en algunos casos resulta efectivo. Este tiene los siguientes pasos lógicos:

- Considerar una posible solución.
- Probar si esta solución satisface las condiciones del problema.
- Adaptar la solución escogida en función de la información recolectada en los pasos anteriores y repetir el proceso hasta obtener la solución correcta.

Ejemplos de Ensayo y Error

Ejemplo 0.3.

Encontrar dos números primos consecutivos entre 1 y 100 cuyo producto sea 323.

Solución del Ejemplo 0.3.

Iniciamos la búsqueda escribiendo la lista de números primos entre 1 y 100 y probamos productos de números consecutivos: 2 , 3, 5, 7, 11, 13, 7, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Probamos estas opciones de dos en dos hasta encontrar que $17 * 19 = 323$.

Ejemplo 0.4.

Calcular un número tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle el número buscado, obtenemos 132.

Solución del Ejemplo 0.4.

Iniciemos evaluando el número 10. Observemos que $10^2 + 10 = 110$. Pero 110 es menor de 132. Entonces buscaremos evaluar números mayores que 10.

Evaluemos por ejemplo el número 14. Vemos qué $14^2 + 14 = 196 + 14 = 210$; pero 210 es mayor de 132, luego probaremos 11, 12 o 13. Probaremos el valor 11: $11^2 + 11 = 121 + 11 = 132$ que finalmente nos da el resultado buscado.

Descomposición del problema

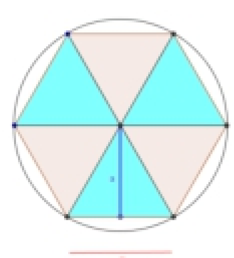
También conocida como "Divide y vencerás". Esta estrategia es muy útil porque muchas veces es difícil ver la relación entre los datos y las incógnitas de un problema. En estos casos una posibilidad que ofrece éxito es la descomposición del problema en problemas más sencillos. Para ello debemos considerar los siguientes pasos:

- Descomponer el problema en sub-problemas. Debemos mantener registro de las relaciones existentes entre esas partes como parte del problema total.
- Resolver los sub-problemas.
- Combinar los resultados hasta lograr una solución del problema total.

Ejemplos de Descomposición del Problema

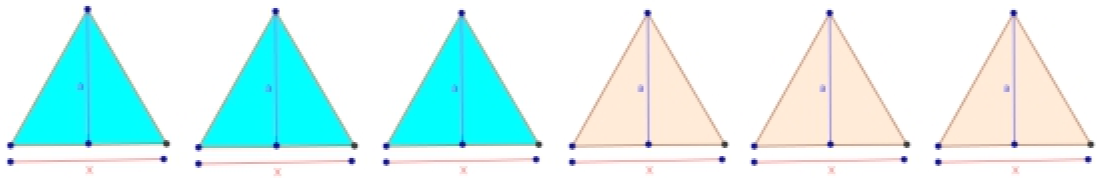
Ejemplo 0.5.

El área de un hexágono regular está dada en función del perímetro y su apotema, ¿sabe cómo deducir la fórmula?



Solución del Ejemplo 0.5.

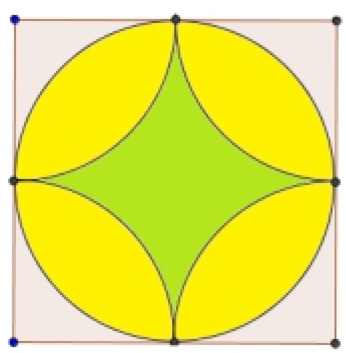
Notemos que en el hexágono tenemos seis triángulos y que la apotema de dicho hexágono es también la altura del triángulo de base x. Por lo tanto podemos calcular el área del hexágono.



Notemos que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}xa$, y entonces tenemos que el área del hexágono es $A = 6\frac{1}{2}xa = 3xa$. Pero sabemos que x es el valor de uno de los lados. Entonces $A = \frac{1}{2}Pa$ donde P es el perímetro del hexágono y a su apotema.

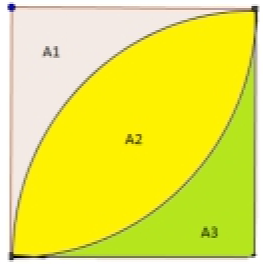
Ejemplo 0.6.

El lado del cuadrado de la siguiente figura mide 1cm. Calcular el área de la zona de color amarillo de la figura.



Solución del Ejemplo 0.6.

Primero vamos descompondremos el problema en otros más pequeños. Dividimos un cuadrante del cuadrado en zonas que denominamos A_1, A_2, A_3; comprobamos que $A_1 = A_3$ y $A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{(4-\pi)}{16}cm^2$, y como $A_1 + A_2 + A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 cm^2$, entonces $A_2 = \frac{1}{16} - \frac{(4-\pi)}{16}cm^2 = \frac{\pi-3}{16}cm^2$.



Por tanto, la parte amarilla es 4 veces $A_3 = \frac{\pi-3}{16} cm^2$, es decir $A = 4 * \frac{\pi-3}{16}\ cm^2 = \frac{\pi-3}{4}\ cm^2$. La estrategia, según se ve, consiste en dividir el problema de forma consciente y sistemática en sus partes y resolver cada una de esas partes.

Búsqueda de un contraejemplo

Esta estrategia se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Esto significa que un enunciado matemático que para ser cierto debe cumplirse para todos los elementos de un conjunto dado.

Este tipo de enunciados dejan de ser verdaderos si en un caso particular de ese conjunto no se cumplen. Por lo tanto, buscamos al menos un elemento del conjunto para el cual el enunciado es falso y con esto probamos la falsedad del enunciado.

Ejemplos de Búsqueda de Contraejemplo

Ejemplo 0.7.

¿Es el número $n^2 - n + 41$ un número primo para todo número natural n?

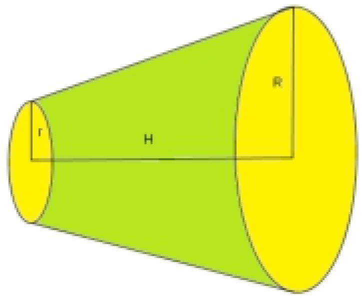
Solución del Ejemplo 0.7.

En efecto no lo es, porque basta verificar que para n = 41; $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ es un número compuesto, puesto que 41^2 es divisible por 41.

Ejemplo 0.8.

Es valida la fórmula para calcular el volumen del tronco de cono:

$V = \frac{1}{3}(R^2 + r^2)\pi H$



Solución del Ejemplo 0.8.

Analicemos los casos límites: $r = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{3}R^2\pi H$, que es el volumen del cono. $r = R \Rightarrow V = \frac{1}{3}2R^2\pi H$, que no es el volumen de un cilindro; luego no es cierta la formula anterior.

Reducción al Absurdo

Utilizamos esta estrategia para demostrar que una afirmación ***P*** es verdadera. Vamos a suponer que ***P*** es falsa, es decir, que se verifica la negación de **P** (**no P**). Suponiendo la falsedad de ***P***, deduciremos que esta falsedad implica situaciones falsas o inconsistentes con hechos que conocemos como ciertos. El hecho que la falsedad de ***P*** resulte en situaciones de inconsistencia lógica prueba que ***P*** es verdadera.

Ejemplos de Reducción al Absurdo

Ejemplo 0.9.

Del libro *Elementos* de Euclides se recoge la siguiente proposición: "Existen infinitos números primos" (P).

Solución del Ejemplo 0.9.

Supongamos que los números primos no son infinitos (**no P**). Entonces, serían finitos: 2, 3, 5, 7, ..., n, siendo n el mayor de todos los números primos. Consideramos ahora el número $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n) + 1$; N no es primo, pues es mayor que n, entonces N debe tener algún divisor primo. Pero si dividimos N por cualquiera de los números primos obtendremos resto 1, por la forma en que se ha definido N. Lo cual implica que N es un número primo, pero dijimos que n es el mayor primo. Por lo tanto, asumir que los números primos son finitos nos lleva a una contradicción lógica. Por lo tanto la afirmación inicial es cierta, es decir, hay infinitos números primos.

Inducción Matemática

En muchas ocasiones, de particularidades hacemos generalizaciones (conjeturas) que resultan falsas. La historia de la Matemática está llena de estos ejemplos. Vemos algunos de estos:

Ejemplo 0.10.

Consideremos el trinomio n^2+n+41, donde n es un número entero positivo. Este problema fue estudiado por Leonhard Euler[6]. Veamos la tabla siguiente dando valores a n.

Valor de n	n^2+n+41	**Resultado**	**Característica**
0	0^2+0+41	41	Número primo
1	1^2+1+41	43	Número primo
2	2^2+2+41	47	Número primo
3	3^2+3+41	53	Número primo
4	4^2+4+41	61	Número primo
5	5^2+5+41	71	Número primo

[6] Matemático y físico suizo. Principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.

De aquí inferimos una conjetura: que al dar a n un valor no negativo el trinomio da siempre por resultado un número primo, conjetura falsa para $x = 41$.

Ejemplo 0.11.

Gottfried Wilhelm Leibniz[7] demostró que cualquiera que sea el entero positivo n el número $n^3 - n$ es divisible por 3, el número $n^5 - n$ es divisible por 5 y el número $n^7 - n$ es divisible por 7. De aquí supuso la conjetura que para todo k impar y para cualquier n natural el número $\mathbf{n^k - n}$ es divisible por k, pero notemos que $2^9 - 2 = 510$ no es divisible por 9, lo cual confirma la falsedad para el caso general.

Ejemplo 0.12.

Un ejemplo muy contundente del cuidado que hay que tener al querer generalizar desde ejemplos particulares es el siguiente: Consideremos la expresión $99n^2 + 1$ y asignemos valores enteros $1, 2, 3, \dots$ Jamás obtendremos el cuadrado de un número aunque dediquemos toda nuestra corta vida, pero no por eso debemos afirmar que no hay un cuadrado de este tipo, pues para $n = 12055735790331359447442538767$ se tiene que el número $99(12055735790331359447442538767)^2 + 1$ es un cuadrado.

Como moraleja de este caso tenemos: Una proposición puede ser válida en una serie de casos particulares y no serlo en general**.** Ahora bien, en el siguiente ejemplo tenemos una conjetura deducida de un patrón, la cual, si bien es válida, no es una demostración.

Ejemplo 0.13.

Encontrar una fórmula cerrada para la suma siguiente: $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Notemos que: $\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{4*5} = \frac{4}{5}$, $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{4*5} + \frac{1}{5*6} = \frac{5}{6}$. Se puede decir que $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Pero esto no es una demostración, es sólo una conjetura. Para demostrar la conjetura haremos uso de la inducción matemática cuyo proceso formal es el siguiente:

---

[7] Filósofo, lógico,matemático, jurista, bibliotecario y político alemán.

El principio de inducción matemática

Supongamos un conjunto de enteros $A = \{n | n \geq a\}$ y una proposición de la forma: para todo n de A, P_n. El principio de inducción matemática consta de los siguientes pasos:

1. Se comprueba que P_n se cumple para el primer valor de verdad, es decir, $n = 1$.
2. Se supone que P_n, se cumple para un valor de $n = k$, tal que $k = 1$ y $k \in 1$. Este paso se toma como una hipótesis y se denominada hipótesis inductiva.
3. Se demuestra que cumple para $n = k + 1$. Este paso se toma como tesis del teorema y se denomina tesis inductiva.

Ejemplo 0.14.

Con esta nueva herramienta, generalicemos una fórmula cerrada para la suma del ejemplo 13: $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Solución del Ejemplo 0.14.

Notemos que: $\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{4*5} = \frac{4}{5}$, $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{4*5} + \frac{1}{5*6} = \frac{5}{6}$. Y conjeturamos que $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ Probaremos nuestra conjetura siguiendo los pasos de la inducción matemática. Para $n = 1$, la hipótesis se cumple pues $\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$, supongamos que la hipótesis se cumple para $n = k$, o sea que $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ (Hipótesis inductiva) donde k es un número natural. Demostraremos que, entonces, la hipótesis es válida para $n = k + 1$, o sea que $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ En efecto, Sustituyendo la hipótesis inductiva en la suma;

$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Entonces, $\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. Hemos probado que para cualquier n entero positivo $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Ejemplo 0.15.

Hallar la suma de los n primeros números naturales $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Solución del Ejemplo 0.15.

Primero intentaremos un proceso de identificación de algún patrón. Notemos que si a la expresión $1+2+3+\cdots+n$ le agregamos la misma suma, pero en orden decreciente: $n + \mathrm{n}-1+\mathrm{n}-2+\cdots 3+2+1$ y posteriormente los sumamos término a término, tenemos: $(n+1)+(n-1+2)+(n-2+3)+\cdots+(n+1)=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)$.

El término $(n+1)$ está n veces, pero como sumamos dos veces la expresión $1+2+3+\cdots+n$, el resultado será $\frac{n(n+1)}{2}$; luego nuestra conjetura es: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Ahora probaremos por inducción matemática dicha conjetura. Para $n=1, 1=\frac{1(1+1)}{2}$, se cumple. Supongamos que es válido para $n=k$, es decir que $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$, es nuestra hipótesis inductiva.

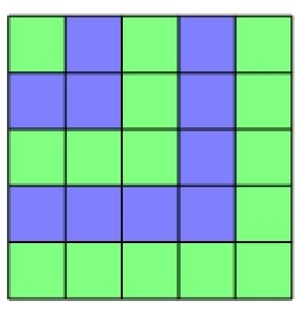
Probemos que se cumple para $n=k+1$, es decir que se cumple $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. En efecto notemos que: $\underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{\text{hipotesis inductiva}}+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$. Por lo tanto: $1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Así $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ es válido para todo entero n positivo. Lo que prueba que la conjetura es válida.

Ejemplo 0.16.

Calcúlese la suma de los n primeros números impares:$1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

Solución del Ejemplo 0.16.

Gráficamente podemos establecer una conjetura: Notemos que $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$. Podemos ver la ilustración en la figura siguiente. En esta se muestra gráficamente la suma de $1+3+5+7+9$.



Tenemos entonces que $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, $1+3+5+7+9=25=5^2$. Así, tenemos la siguiente conjetura: $1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=\mathrm{n}^2$.

Probemos por inducción matemática dicha conjetura:

Para $n=1, 1=1^2$, la propiedad se cumple. Supongamos que es válido para $n=k$, es decir que $1+3+5+\cdots+2k-1=k^2$, nuestra hipótesis inductiva. Probemos que se cumple para $n=k+1$, es decir que se cumple:

$1+3+5+\cdots+2\mathrm{k}-1+2(\mathrm{k}+1)-1=(\mathrm{k}+1)^2$

En efecto notemos que:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+2k-1}_{\text{hipotesis inductiva}}+2(\mathrm{k}+1)-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Por lo tanto: $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$. Para todo entero positivo n.

Capítulo 1

Problemas de Aritmética

A continuación se presenta una serie de problemas que son mayoritariamente de Aritmética o que en general han sido abordados con un enfoque aritmético.

Enunciados de los Problemas de Aritmética

Problema 1.1.

¿Cuál es el valor de $(100+98+96+\cdots.+4+2)-(1+3+5+\cdots+97+99)$?

Problema 1.2.

Demuestre que $\frac{\left(2^2+4^2+\cdots+2010^2+2012^2\right)^2-\left(1^2+3^2+\cdots+2009^2+2011^2\right)^2}{3018(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)}$ es un número entero.

Problema 1.3.

Encuentre cuatro enteros positivos a, b, c, d tales que $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{20}{13}$

Problema 1.4.

Calcular: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{9900}+\frac{1}{10100}$

Problema 1.5.

¿Cuál es valor del producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$?

Problema 1.6.

Coloque uno de los signos aritméticos $+,-,*,\div$ entre cada par de números sucesivos del lado izquierdo de la igualdad para que sea verdadera. Las operaciones pueden usarse más de una vez o no usarse.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \;=100$$

Problema 1.7.

Encuentre la suma de $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}}$

Problema 1.8.

¿Cuál es el valor de $\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$?

Problema 1.9.

Demuestre que $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{2014}$ es un número entero.

Problema 1.10.

Defínase la operación $\sim$ para la cual se observa: $\sim\mathbf{1}=2^2-3*1$; $\sim 2=3^2-4\times 2$; $\sim 3=4^2-5*3$; $\sim 4=5^2-6*4$. Hallar ~ 15.

Problema 1.11.

Si $1^2=1$; $11^2=121$; $111^2=12321$; $1111^2=1234321$. Hallar 1111111^2 y, además, dar la suma de los dígitos del resultado.

Problema 1.12.

Calcule la suma de las cifras de: $M = \left(\underbrace{333\ldots333}_{52\ cifras}\right)^2 + \underbrace{(999..99)^2}_{52\ cifras}$

Problema 1.13.

Hallar la suma de las cifras de $M = 9 * \underbrace{888\ldots88}_{1997\,cifras}$

Problema 1.14.

Hallar la suma de los dígitos de f_{20} si sabemos que $f_1 = 1x100 + 50$, $f_2 = 2x99 + 49$, $f_3 = 3x98 + 48$.

Problema 1.15.

Hallar la suma de los números en la fila 2012.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & - & 2 & & & \\
 & & 3 & - & 3 & + & 3 & & \\
 & 4 & - & 4 & + & 4 & - & 4 & \\
5 & - & 5 & + & 5 & - & 5 & + & 5
\end{array}$$

Problema 1.16.

Hallar A + B

Fig. 1	1				
Fig. 2	1	3			
Fig. 3	1	3	5		
Fig. 4	1	3	5	7	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Fig. 2012	A	⋯		⋯	B

Problema 1.17.

Si esta secuencia continua. ¿Cuál será la suma de los dígitos en la fila 2013?

						1						
					2	3	4					
				5	6	7	8	9				
			0	1	2	3	4	5	6			
		7	8	9	0	1	2	3	4	5		
	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Problema 1.18.

En el patrón de números que se muestran, cada fila comienza con un 1 y termina con un 2. Los demás números son iguales a la suma de los dos números situados inmediatamente arriba. Por ejemplo, en la cuarta fila 9 es la suma de 4 y 5. Si se continúa construyendo las filas siguientes con este mismo patrón, ¿cuál es la suma de todos los números de la decimotercera fila?

1 2

1 3 2

1 4 5 2

1 5 9 7 2

1 6 14 16 9 2

Problema 1.19.

¿Cuánto suman los dígitos de la cantidad $4^{1007} * 5^{2014}$?

Problema 1.20.

¿Cuál es dígito de las unidades de 7^{2012}?

Problema 1.21.

¿Cuál es la cantidad de números de tres dígitos que no contienen el cero y uno de los dígitos es la suma de los otros dos?

Problema 1.22.

¿Cuál es el número de enteros entre 100 y 400 que contienen el digito 2?

Problema 1.23.

¿Cuántos números de tres dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es 13 y el producto de estos es mayor que 60?

Problema 1.24.

¿Cuántos números enteros de tres dígitos hay que, al multiplicarse sus dígitos, dan un producto que es mayor que 60 y menor que 65?

Problema 1.25.

¿Cuántos números enteros impares positivos menores que 1000 tienen la propiedad de que el producto de sus dígitos es 252?

Problema 1.26.

Jerry escribió todos los enteros positivos que tienen un máximo de 7 dígitos y contiene sólo los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas veces tuvo que anotar el dígito 1?

Problema 1.27

¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 5^{2013}?

Problema 1.28.

¿Cuántos números de 5 dígitos con todos los dígitos distintos de cero y no repetidos son divisibles por 25?

Problema 1.29.

Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100 que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

Problema 1.30.

Encuentre todos los enteros positivos menores que 2013 y que no son divisibles por 3.

Problema 1.31.

¿Es posible armar una colección de 7 o más enteros positivos tales que no haya dos cuya suma o diferencia sea divisible por 11?

Problema 1.32.

¿Cuál es el más pequeño número primo que divide $3^{11}+5^{12}$?

Problema 1.33.

El número 2004 tiene 12 divisores, incluyendo a 1 y 2004. ¿Cuántos divisores distintos tiene 2004^4?

Problema 1.34.

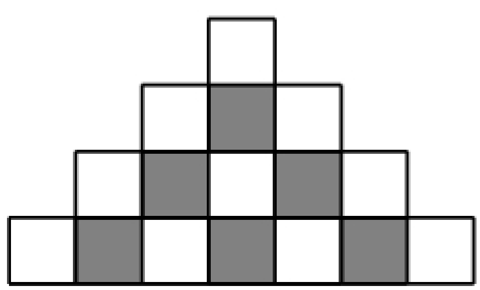
¿Cuál es la más grande potencia de 2 que divide a $2^{2012}+10^{2012}$?

Problema 1.35.

¿Cuál es el número de subconjunto de 7 elementos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ Para los cuales la suma de sus elementos es un múltiplo de 3?

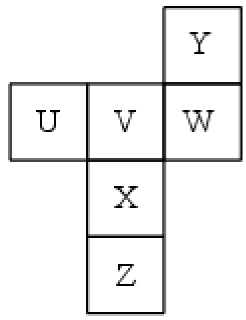
Problema 1.36.

La siguiente figura es construida con cuadrados alternados en blanco y negro en cada fila. Todas las filas comienzan y terminan con un cuadrado blanco. ¿Cuál es el número de casillas negras en la fila 37?



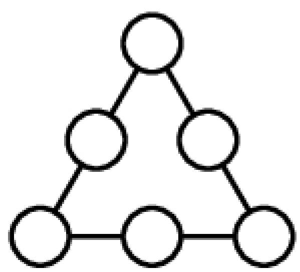
Problema 1.37.

Con un trozo de papel que contiene seis cuadrados unidos, etiquetados como se muestra en el diagrama, se forma un cubo. ¿Cuál es la cara opuesta a la marcada con X?



Problema 1.38.

En un triángulo mágico cada uno de los seis números enteros entre 10 y 15 se coloca en uno de los círculos, de modo que la suma "S" de los tres números de cada lado del triángulo es la misma. ¿Cuál es el valor más grande posible para "S"?



Problema 1.39.

Las figuras 0, 1, 2, y 3 constan de 1, 5, 13, y 25 cuadrados respectivamente. Si el patrón se continúa, ¿cuántas unidades cuadradas habría en la figura 2013?

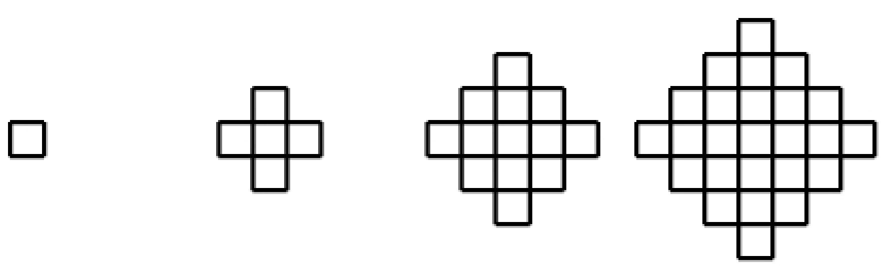


Figura 0 **Figura 1** **Figura 2** **Figura 3**

Problema 1.40.

Dadas las figuras, en las que la figura $n + 1$ se obtiene a partir de la figura n mediante la adición de dos cuadrados, uno vertical y el otro horizontal, ¿Cuál es el número de cuadrados en la figura 2013?

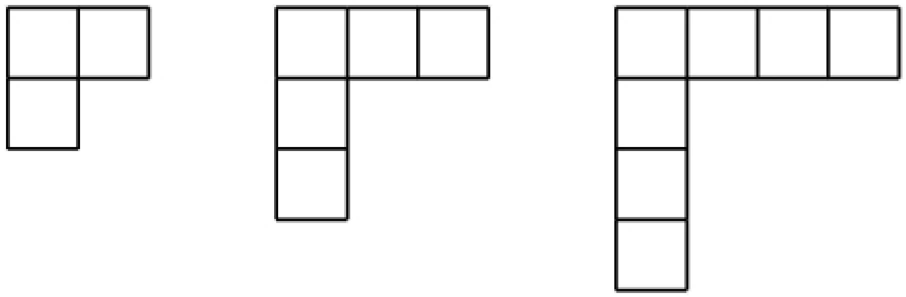


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

Problema 1.41.

¿Es posible enumerar, del 1 al 12, las aristas de un cubo de tal forma que la suma de las tres aristas que coinciden en un sólo vértice sea siempre la misma?

Problema 1.42.

María salió a correr durante 2 horas. Su recorrido empezó en un terreno plano donde su velocidad fue de $5\,km/h$ y siguió en un terreno inclinado donde su velocidad fue de $3km/h$. Regresando por el mismo lugar, la velocidad en la parte inclinada fue de 6 km/h mientras que la velocidad en la parte plana fue de $4\,km/h$. ¿Cuál es la distancia total que recorrió María?

Problema 1.43.

Asuma que m y n son números enteros tales que $5m + n = 100$. ¿Cuál es el valor más grande posible para $m * n$?

Problema 1.44.

Definimos una función f tal que, si x es un número divisible por 10, entonces $f(x) = \frac{x}{10}$; y si x no es un número divisible por 10, entonces $f(x) = x + 1$.

¿Cuál es el n más pequeño tal que $a_n = 1$ sabiendo que $a_0 = 1993$ y $a_{n+1} = f(a_n)$?

Problema 1.45.

Hay 270 estudiantes en Centro Escolar República de El Salvador, donde la proporción de niños y niñas es de $5:4$.

Hay 180 estudiantes en el Centro Escolar Centro América, donde la proporción de niños y niñas es de $4:5$.

Las dos escuelas tienen un baile y todos los estudiantes de ambas escuelas asisten. ¿Qué fracción de los asistentes al baile está formado por chicas?

Problema 1.46.

Un pequeño mono araña se come todas las hojas de un matorral en 10 horas. Si su papá y su mamá comen ambos el doble de rápido que el pequeño. ¿Cuántas horas tardan, los tres monos juntos, en comer todas las hojas del matorral?

Problema 1.47.

La población de un municipio se incrementó en 1200 personas. Luego, esta nueva población disminuyó en un $11\,\%$.

El municipio tiene ahora 32 personas menos de las que tenía antes del aumento de 1200. ¿Cuál fue la población original?

Problema 1.48.

Dos naves inter-espaciales, Acajutla y Cuscatlán, parten hacia Marte con sus relojes sincronizados al momento del despegue.

El reloj de Acajutla está descompuesto de modo que se atrasa 200 minutos por cada 10065. El reloj de Cuscatlán, está descompuesto de modo que este se adelanta 100 minutos por cada 10065.

Al llegar a Marte, las tripulaciones de las dos naves se dan cuenta que en ese momento ambos relojes marcan la misma hora. ¿Cuántos minutos tomó el viaje?

Problema 1.49.

Hay 8 monedas que se ven iguales pero sólo una es de oro sólido. La moneda de oro macizo pesa ligeramente más que las falsificaciones. Para identificar la moneda de oro real, usted puede utilizar la balanza sólo dos veces. ¿Cómo puedes averiguar cuál es la moneda real?

Problema 1.50.

¿Cuál de los siguientes tiene que ser un número entero?

a) El promedio de dos números enteros pares.
b) El promedio de dos números primos.
c) El promedio de dos cuadrados perfectos.
d) El promedio de dos múltiplos de 4.
e) El promedio de tres enteros consecutivos.

Ubicación Curricular de los Problemas de Aritmética

A continuación relacionamos los enunciados de problemas presentados en el capítulo anterior con los contenidos establecidos por el programa de estudios oficial de la República de el Salvador y los pre-saberes deseables para la resolución de cada problema. Se indican también, a manera de ayuda en la resolución de los anteriores problemas, estrategias recomendadas para resolver cada problema. Una descripción de estas estrategias puede encontrarse al inicio del libro. En el capítulo siguiente se presentan soluciones a estos mismos problemas.

Problemas Para el Programa de Tercer Ciclo

Grado	Temas	Problemas	Pre-saberes	Estrategia
7°	**Unidad 1:** Apliquemos los números enteros. Representación gráfica de enteros, operaciones combinadas y ley de los signos.	1.1, 1.17, 1.36, 1.37, 1.38.	Operaciones básicas.	Descomposición del problema, Ensayo y error.
		1.6.	Operaciones básicas.	Ensayo y error.
7°	**Unidad 3:** Operemos con números racionales. Representación geométrica de los números racionales, fracciones equivalentes y complejas, y operaciones con fracciones y decimales.	1.3, 1.4, 1.5.	Operaciones con fracciones.	Descomposición de problema en partes.
		1.12, 1.13.	Operaciones básicas con números enteros.	Identificación de patrones.
7°	**Unidad 5:** Utilicemos proporcionalidad. Razones, proporciones, plano cartesiano, proporcionalidad directa e inversa, regla de tres simple directa, tanto por ciento.	1.45, 1.46.	Operaciones básicas con números enteros.	Descomposición del problema.
7°	**Unidad 6:** Conozcamos y utilicemos el Álgebra. Notación algebraica, signos y expresiones algebraicas, grado absoluto y relativo de monomios, términos semejantes, reducción y valor numérico de monomios.	1.10, 1.14, 1.15, 1.16.	Operaciones básicas con números enteros.	Identificación de patrones.

Grado	Temas	Problemas	Pre-saberes	Estrategia
7°	**Unidad 7: Utilicemos los exponentes.** Exponente entero positivo, negativo y cero; propiedades, notación científica y conversión de notación decimal a científica y viceversa.	1.11.	Operaciones básicas con notación científica.	Identificación de patrones.
		1.27.	Operaciones básicas con notación científica.	Descomposición del problema.
7°	**Unidad 9: Conozcamos y apliquemos los radicales.** Raíz cuadrada y cúbica exacta, Propiedades de los radicales, radicales semejantes y operaciones.	1.7, 1.8.	Operaciones básicas con notación científica.	Descomposición del problema.
8°	**Unidad 1: Trabajemos con números reales.** Operaciones con números irracionales y Reales. Cálculo de la raíz cuadrada.	1.19, 1.20.	Potenciación.	Descomposición del problema.
8°	**Unidad 4: Aprendamos a factorizar.** Factor común, trinomios factorizables, suma o diferencia de potencias iguales, combinación de casos.	1.2.	Diferencia de cuadrados de cantidades.	Combinación de propiedades algebraicas y progresiones aritméticas.
		1.9.	Binomio al cuadrado, Operaciones algebraicas.	Uso de propiedades algebraicas para simplificar cantidades.
8°	**Unidad 6: Operemos fracciones algebraicas.** Cálculo y aplicación del mínimo común múltiplo y máximo común divisor de monomios y polinomios y la simplificación de fracciones.	1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33, 1.34, 1.35.	Criterios de divisibilidad.	Ensayo y error, Descomposición del problema. Identificación de patrones.
8°	**Unidad 9: Trabajemos con ecuaciones.** Ecuaciones enteras y fraccionarias de primer grado con una incógnita.	1.48, 1.49, 1.50.	Operaciones básicas.	Uso de propiedades algebraicas para simplificar cantidades.
9°	**Unidad 5: Resolvemos ecuaciones de segundo grado.** Métodos de solución.	1.42, 1.43.	Ecuaciones de primer grado, Ecuaciones de segundo grado.	Uso de propiedades algebraicas para simplificar cantidades.

Problemas para el Programa de Educación Media

Grado	Temas	Problema	Pre-saberes	Estrategia
1°	**Unidad 4: Grafiquemos relaciones y funciones.** Dominio recorrido y gráfica.	1.44.	Ecuaciones de segundo grado.	Descomposición del problema.

Grado	Temas	Problema	Pre-saberes	Estrategia
2°	**Unidad 1: Estudiemos sucesiones aritméticas y geométricas**. Características, términos.	1.39, 1.40, 1.41.	Operaciones básicas, con números enteros.	Identificación de patrones, Reducción al absurdo.
2°	**Unidad 2: Utilicemos el conteo. Técnicas de conteo.** Factorial de un número. Permutaciones. Combinaciones. Diagrama de árbol.	1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.28.	Métodos de conteo.	Descomposición del problema.
2°	**Unidad 3: Analicemos la función exponencial y logarítmica.** Características. Dominio, rango o recorrido, gráficas.	1.18.	Operaciones básicas, con números enteros, potencias.	Identificación de patrones.

Soluciones de los Problemas de Aritmética

Problema 1.1.

¿Cuál es el valor de $(100 + 98 + 96 + \cdots + 4 + 2) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99)$?

Solución del Problema 1.1.

Podemos reorganizar la expresión de la siguiente manera: $(100 + 98 + \cdots + 4 + 2) - (99 + 97 + \cdots + 3 + 1) = 100 - 99 + 98 - 97 + \cdots + 4 - 3 + 2 - 1$. Observemos que podemos agrupar los números de dos en dos de tal forma que cada suma resulte en uno: $100 - 99 + 98 - 97 + \cdots + 4 - 3 + 2 - 1 = (100 - 99) + (98 - 97) + \cdots + (4 - 3) + (2 - 1)$. De esto obtendremos la suma: $1 + 1 + \cdots + 1 + 1$. La serie contiene 50 sumandos. Por tanto, la suma total es 50.

Problema 1.2.

Calcular $\frac{(2^2+4^2+\cdots+2010^2+2012^2)^2-(1^2+3^2+\cdots+2009^2+2011^2)^2}{4026(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)}$

Solución del Problema 1.2.

Utilizando la diferencia de cuadrados para el numerador de la expresión tenemos:

$\frac{(2^2+4^2+\cdots+2010^2+2012^2)^2-(1^2+3^2+\cdots+2009^2+2011^2)^2}{4026(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)} = \frac{(2^2+4^2+\cdots+2010^2+2012^2)+(1^2+3^2+\cdots+2009^2+2011^2)}{4026(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)} *$ $(2^2 + 4^2 + \cdots + 2012^2 - (1^2 + 3^2 + \cdots + 2011^2) = \frac{1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2}{4026(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)} * [2^2 + 4^2 + \cdots + 2010^2 + 2012^2 - (1^2 + 3^2 + \cdots + 2009^2 + 2011^2)] = \frac{1}{4026} * (2^2 + 4^2 + \cdots + 2010^2 + 2012^2 - (1^2 + 3^2 + \cdots + 2009^2 + 2011^2))$. Ordenando y simplificando tenemos: $\frac{1}{4026} * (2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + 6^2 - 5^2 + \cdots + 2012^2 - 2011^2) = \frac{(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\cdots+(2012-2011)(2012+2011)}{4026} = \frac{3+7+11+15+\cdots+4023}{4026}$. Notemos que $3 + 7 + 11 + 15 + \cdots .+4023$ es una progresión aritmética, por lo tanto podemos calcular su suma mediante $S = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(3+4023)4}{2} = 8052$. De esto se deduce que: $\frac{(2^2+4^2+\cdots+2010^2+2012^2)^2-(1^2+3^2+\cdots+2009^2+2011^2)^2}{4026(1^2+2^2+\cdots+2011^2+2012^2)} = \frac{8052}{4026} = 2$

Problema 1.3.

Encuentre tres enteros positivos a, b, c, d tales que $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{20}{13}$

Solución del Problema 1.3.

Sabemos que $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{20}{13}$. Entonces, $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{13}{13}+\frac{7}{13}=1+\frac{7}{13}$. Por lo tanto, se deduce que $a=1$ y que $\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{7}{13}$. Así, $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{13}{7}$. Por el mismo argumento, $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{7}{7}+\frac{6}{7}=1+\frac{6}{7}$. De esto deducimos que $b=1$ y $\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{6}{7}$. Entonces, $c+\frac{1}{d}=\frac{7}{6}=\frac{6}{6}+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{6}$. Por lo tanto, $c=1$ y $\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$. Por lo tanto $d=6$. En conclusión, $a=1, b=1, c=1, d=6$.

Problema 1.4.

Calcular: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{9900}+\frac{1}{10100}$

Solución del Problema 1.4.

Observemos el desarrollo de la suma para algunos casos con unos pocos sumandos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}=\frac{4}{5}$. Observemos que la $k-\acute{e}sima$ fracción de cada suma tiene la forma $\frac{1}{k(k+1)}$. Al mismo tiempo, observando el patrón que muestran los resultados, la suma de estas k fracciones parece ser: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

Para demostrar que esto es cierto para todo n, utilizaremos inducción. Observemos primero que esta hipótesis se cumple para el caso en que tenemos un solo sumando: $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{1*(1+1)}=\frac{1}{(1+1)}=\frac{1}{2}$. Si sabemos que para algún entero n se cumple que, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, entonces para $n+1$ tendremos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$. Entonces, la propiedad se cumple también para $n+1$. Esto demuestra que la propiedad es válida para cualquier n. Por lo tanto, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{9900}+\frac{1}{10100}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\cdots+\frac{1}{99*100}+\frac{1}{100*101}=\frac{100}{101}$.

Problema 1.5.

¿Cuál es valor del producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$?

Solución 1 del Problema 1.5.

Como queremos calcular todo el producto, haremos algunos casos particulares con los que buscamos determinar algún patrón. Calculemos los productos: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{1(2)}{1(3)}=\frac{2}{3}$; $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{15}{16}\right)=\frac{5}{8}$; $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{24}{25}\right)=\frac{3}{5}$. Observemos que con los casos particulares no es muy visible el patrón que siguen los resultados.

Así que, estudiaremos más a detalle la estructura de estas expresiones. Sea el primer producto: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+1)^2}\right)=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{2^2+2*2}{(2+1)^2}\right)=\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}*\frac{2(2+2)}{(2+1)^2}=\frac{(2-1)(2+2)}{2(2+1)}=\frac{2}{3}$.

Ahora veamos el producto con tres factores: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+2)^2}\right)=\frac{(2-1)(2+2)}{2(2+1)}*\frac{2^2+4*2+3}{(2+2)^2}=\frac{(2-1)(2+2)}{2(2+1)}*\frac{(2+3)(2+1)}{(2+2)^2}=\frac{(2-1)(2+3)}{2(3+1)}=\frac{5}{8}$. De forma análoga podemos calcular el producto con cuatro factores:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+2)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2+3)^2}\right)=\frac{(2-1)(2+4)}{2(4+1)}=\frac{3}{5}.$$

Entonces, podemos conjeturar que si n es el número de factores a multiplicar, El resultado de multiplicar n factores es $\frac{(2-1)(2+n)}{2(n+1)}$.

Ahora bien, en el producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$ tenemos 2012 factores, es decir, $n=2012$.

Por tanto, el producto de estos es:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)=\frac{(2-1)(2+2012)}{(2)(2012+1)}=\frac{2014}{4026}.$$

Solución 2 del Problema 1.5.

Consideremos el caso general de estos productos. Es decir: $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)*$

$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\ldots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \frac{(2+1)(2-1)}{2^2} * \frac{(3+1)(3-1)}{3^2} * \ldots * \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} =$
$\frac{(2+1)(2-1)(3+1)(3-1)\ldots(n+1)(n-1)}{2^2*3^2*\ldots*n^2} = \frac{\left((2+1)(3+1)\ldots(n+1)\right)*\left((2-1)(3-1)\ldots(n-1)\right)}{2^2*3^2*\ldots*n^2} =$
$\frac{\left(3*4*\ldots*(n+1)\right)*\left(1*2*3\ldots(n-1)\right)}{2^2*3^2*\ldots*n^2} = \frac{1*2*3^2*4^2*\ldots*(n-1)^2*n*(n+1)}{2^2*3^2*\ldots*n^2} = \frac{1*2*n*(n+1)}{2^2*n^2} = \frac{1*2*n*(n+1)}{2^2*n^2} = \frac{n+1}{2n}.$

De esto concluimos que $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2013^2}\right) = \frac{2013+1}{2(2013)} = \frac{2014}{4026}.$

Problema 1.6.

Coloque uno de los signos aritméticos $+,-,*,\div$ entre cada par de números sucesivos del lado izquierdo de la igualdad para que sea verdadera. Las operaciones pueden usarse más de una vez o no usarse.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \;=\; 100$$

Solución del Problema 1.6.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 * 9 = 100$

Problema 1.7.

Encuentre la suma de $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}}$

Solución del Problema 1.7.

Al operar la expresión dada obtenemos: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2013*2012}} - \frac{\sqrt{2012}}{\sqrt{2013*2012}} + \frac{\sqrt{2014}}{\sqrt{2014*2013}} - \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}}$. Es decir que, $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2012}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2013}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2013}} - \frac{1}{\sqrt{2014}}$. Observemos que, en la expresión anterior al agrupar algunos de los sumandos de dos en dos el resultado de su suma es cero. Tomando esto en cuenta tenemos: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \cdots + \frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2014*2013}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2014}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2014}}.$

Problema 1.8.

¿Cuál es el valor de $\sqrt{10+4\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}$?

Solución del Problema 1.8.

Elevamos toda la expresión al cuadrado: $\left(\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}\right)^2$. Ahora desarrollemos el cuadrado: $\left(\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{10+4\sqrt{6}}\right)^2-2\left(\left(\sqrt{10+4\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{10-4\sqrt{6}}\right)\right)+\left(\sqrt{10-4\sqrt{6}}\right)^2=$
$10+4\sqrt{6}+10-4\sqrt{6}-2\sqrt{(10+4\sqrt{6})(10-4\sqrt{6})}=$
$20-2\sqrt{100+40\sqrt{6}-40\sqrt{6}-96}=20-2\sqrt{4}=16$. Pero este es el valor del cuadrado de la expresión original. Por lo tanto, $\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}=\sqrt{16}=4$.

Problema 1.9.

Demuestre que $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{2014}$ es un número entero.

Solución del Problema 1.9.

Sea $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ y $y=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. Entonces, $x^2=5+2\sqrt{6}$ y $y^2=5-2\sqrt{6}$. Por lo tanto, $x^2+y^2=5+2\sqrt{6}+\ 5-2\sqrt{6}=10$. Además, $xy=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=1$. Así, tenemos que $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=x^2+y^2-2xy=10-2(1)=8$. Ahora analicemos la expresión original: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{2014}=((x-y)^2)^{1007}=8^{1007}=\left(2^3\right)^{1007}=2^{3021}$. Esto demuestra que $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{2014}$ es entero.

Problema 1.10.

Defínase la operación ~ para la cual se observa: $\sim\mathbf{1}=2^2-3*1$; $\sim 2=3^2-4*2$; $\sim 3=4^2-5*3$; $\sim 4=5^2-6*4$. Hallar ~ 15.

Solución del Problema 1.10.

En base a los valores presentados para la operación ~, se puede conjeturar una forma general de esta operación. Para cada uno de estos valores, la operación es la diferencia del cuadrado del valor más uno, menos el producto del valor aumentado en dos y el valor mismo. Así, podemos conjeturar que para un valor n la operación $\sim n$ tendrá la forma siguiente:

$\sim n = (n+1)^2 - (n+2)(n) = (n^2+2n+1) - (n^2+2n) = 1$

De lo anterior podemos concluir que $\sim 15 = 1$.

Problema 1.11.

Si $1^2 = 1$; $11^2 = 121$; $111^2 = 12321$; $1111^2 = 1234321$. Hallar 1111111^2 y, además, dar la suma de los dígitos del resultado.

Solución 1 del Problema 1.11.

En los resultados conocidos observamos un patrón en los dígitos de los resultados. Consideremos como n el número de dígitos de la cantidad original a elevar al cuadrado. El dígito medio de los resultados es el mismo número que la cantidad de dígitos en el número original. A ambos lados de este dígito central, se van colocando los dígitos menores.

Podemos continuar el patrón como se muestra: $11111^2 = 123454321$, $111111^2 = 12345654321$, $1111111^2 = 1234567654321$. Por lo tanto, conjeturamos que el resultado para $n = 7$ es: $1111111^2 = 1234567654321$. Entonces, la suma de los dígitos será: $2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) + 7 = 49$

Notemos que este patrón no se puede generalizar para n igual o mayor que 10. En estos casos el dígito central, que como vimos debe ser igual a n, ya no puede ser representado por un solo dígito y esto a su vez afecta a otros dígitos. Por ello necesitamos encontrar un modelo más general.

Solución 2 del Problema 1.11.

Para construir una solución más general utilizaremos el hecho de que un número decimal puede descomponerse en una suma de potencias de 10. Así por ejemplo, el número 1821 puede descomponerse de la siguiente forma: $1821 = 1 * 10^3 + 8 * 10^2 + 2 * 10^1 + 1 * 10^0$.

El número 11111 se puede también descomponer como: $11111 = 1 * 10^4 + 1 * 10^3 + 1 * 10^2 + 1 * 10^1 + 1 * 10^0$. Consideremos la expresión en potencias de 10 del número formado por *n+1* dígitos uno: $1 * 10^n + 1 * 10^{n-1} + \cdots + 1 * 10^1 + 1 * 10^0 = 10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0$.

El cuadrado de esta expresión será la suma siguiente: $(10^n)(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) + (10^{n-1})(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) + \cdots + (10^1)(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) + (10^0)(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0)$.

Efectuando estas sumas tendremos:

$$\begin{array}{l}
10^{2n} + 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^{n+1} + 10^n + \\
\qquad 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^{n+1} + 10^n + 10^{n-1} + \\
\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad 10^{n+1} + 10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + 10^0
\end{array}$$

Que es igual a $1 * 10^{2n} + 2 * 10^{2n-1} + \cdots + (n+1) * 10^n + \cdots + 1 * 10^0$. Observemos que esta expresión representa la estructura para cualquier valor posible de n, no únicamente hasta $n = 9$ como era el caso en la solución anterior.

Por lo tanto, para obtener el resultado de $n + 1 = 7$ tenemos: $1 * 10^{12} + 2 * 10^{11} + 3 * 10^{10} + 4 * 10^9 + 5 * 10^8 + 6 * 10^7 + 7 * 10^6 + 6 * 10^5 + 5 * 10^4 + 4 * 10^3 + 3 * 10^2 + 2 * 10^1 + 1 * 10^0 = 1234567654321$. Por tanto la suma de los dígitos es 49.

Problema 1.12.

Calcule la suma de las cifras de M, si $M = \Big(\underbrace{333 \ldots 333}_{52\ cifras}\Big)^2 + \underbrace{(999..99)^2}_{52\ cifras}$

Solución del Problema 1.12.

Calculemos los resultados por casos; Si consideramos la suma para números de una cifra, $3^2 + 9^2 = 90$, la suma de las cifras es $9 + 0$; para números de dos dígitos, $33^2 + 99^2 = 10890$, la suma será $1 + 0 + 8 + 9 + 0 = 18 = 1(1) + 0 + 8(1) + 9 + 0$; Para números de tres cifras, $333^2 + 999^2 = 1108890$, la suma será $1 + 1 + 0 + 8 + 8 + 9 + 0 = 27 = 1(2) + 0 + 8(2) + 9 + 0$. Entonces, podemos conjeturar que $\Big(\underbrace{333 \ldots 333}_{\text{n}\ cifras}\Big)^2 + \underbrace{(999..99)^2}_{\text{n} cifras} = \underbrace{111 \ldots 111}_{n-1\, cifras}\, 0\, \underbrace{888 \ldots 888}_{n-1\ cifras}\, 90$.

Por lo tanto, su suma será: $1(n-1) + 0 + 8(n-1) + 9 + 0 = 1(n-1) + 8(n-1) + 9 = 9(n-1) + 9 = 9n$. De esta forma general deducimos que: $M = \Big(\underbrace{333 \ldots 333}_{52\ cifras}\Big)^2 + \underbrace{(999..99)^2}_{52\, cifras} = 9(52) = 468$.

Problema 1.13.

Hallar la suma de las cifras de $M = 9 * \underbrace{888\ldots 88}_{1997\, cifras}$

Solución del Problema 1.14.

Los valores presentados sugieren un patrón de la forma $f_n = n(101 - n) + (51 - n)$. De esta forma podemos calcular los siguientes valores:

$f_4 = 4(101 - 4) + (51 - 4) = 4 * 97 + 47 = 435$, $f_5 = 5(101 - 5) + (51 - 5)$

$= 5 * 96 + 46 = 526$, $f_6 = 6(101 - 6) + (51 - 6) = 6 * 95 + 45 = 615$.

Entonces, $f_{20} = 20(101 - 20) + (51 - 20) = 20(81) + (31) = 1651$.

Solución del Problema 1.13.

Calculemos el resultado para algunos casos particulares. Al multiplicar por 8 tenemos $9 * 8 = 72$ cuyas cifras suman $7 + 2 = 9$; al multiplicar por 88 tenemos $9 * 88 = 792$ cuyas cifras suman $7 + 9 + 2 = 9 * 2$; al multiplicar por 888 tenemos $9 * 888 = 7992$ cuyas cifras suman $7 + 9 + 9 + 2 = 7 + 9(2) + 2 = 9 * 3$.

Observemos que estos números describen un patrón. Conjeturamos que para $9 * \underbrace{888\ldots 88}_{\text{n cifras}}$ el resultado de las sumas de sus cifras será $9n$. Por lo tanto, para $n = 1997$ tendríamos: $M = 9 * \underbrace{888\ldots 88}_{1997\, cifras} = 7 + 9(1996) + 2 = 31938$

Problema 1.14

Hallar la suma de los dígitos de f_{20} si sabemos que $f_1 = 1 * 100 + 50$, $f_2 = 2 * 99 + 49$, $f_3 = 3 * 98 + 48$.

Problema 1.15.

Hallar la suma de los números en la fila 2012.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & - & 2 & & & \\
 & & 3 & - & 3 & + & 3 & & \\
 & 4 & - & 4 & + & 4 & - & 4 & \\
5 & - & 5 & + & 5 & - & 5 & + & 5
\end{array}
$$

Solución del Problema 1.15.

Determinemos los resultados de las operaciones de cada fila. La primera fila resulta en 1; en la segunda fila tenemos $2 - 2 = 0$; En la tercera fila tenemos $3 - 3 + 3 = 3$; En la cuarta fila tenemos $4 - 4 + 4 - 4 = 0$.

De estos resultados anteriores observamos que para los números de fila pares, números de la forma $2k$, el mismo número será sumado y restados la misma cantidad de veces resultando en una suma de cero.

Para los números impares, que son de la forma $2k + 1$, el número de fila será sumado una vez más que la cantidad de veces que este será restado. Por lo tanto, para las filas impares el resultado de las operaciones de la fila será el mismo número de fila. Con base a estas observaciones concluimos que el resultado de la fila 2012, por ser número de fila par, es cero.

Problema 1.16.

Hallar A + B

Fig. 1	1					
Fig. 2	1	3				
Fig. 3	1	3	5			
Fig. 4	1	3	5	7		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
Fig. 2012	A	...			...	B

Solución del Problema 1.16.

En el esquema anterior podemos observar una sucesión aritmética de números impares en cada fila. La primera (fig1.) incluye sólo el primer número impar. La segunda (fig2) los primeros dos números impares, y así sucesivamente.

La fila n contendrá entonces los primeros n impares. Es decir, los números impares entre 1 y $2n-1$. De esto podemos deducir que para fig. 2012, el valor de A será 1, mientas que B será el impar con ordinal 2012, es decir $B = 2N - 1 = 2(2012) - 1 = 4023$. Por lo tanto, $A + B = 1 + 4023 = 4024$.

Problema 1.17.

Si esta secuencia continúa, ¿cuál será la suma de los dígitos en la fila 2013?

1

2 3 4

5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6

7 8 9 0 1 2 3 4 5

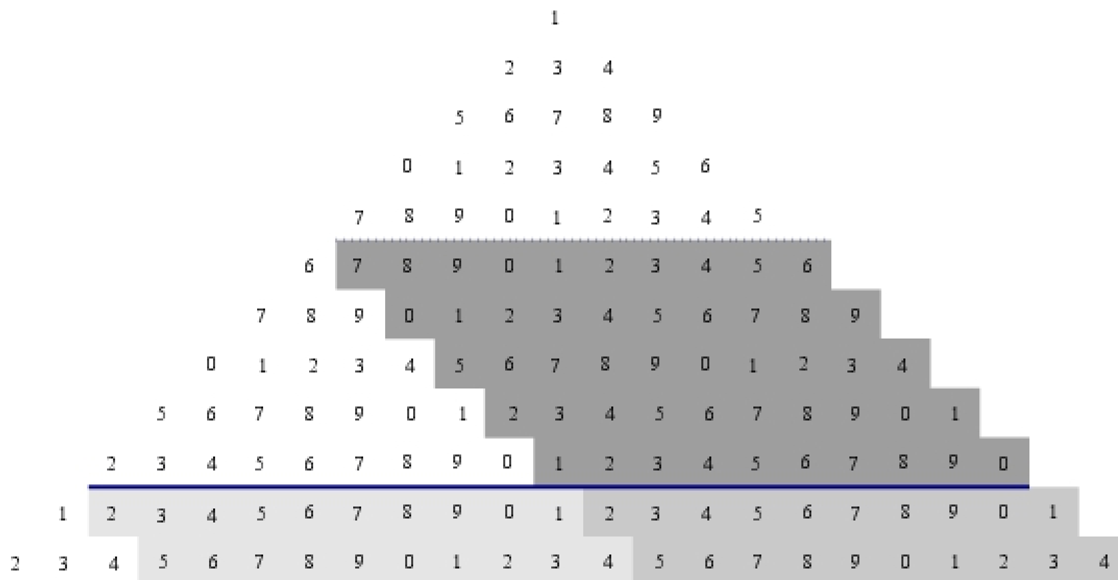
6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6

7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Solución del Problema 1.17.

Consideremos los valores en la pirámide. Ésta se divide en secciones de 10 filas. En las primeras 5 filas, hay 25 números. Por ello, si el primer número es 1, entonces el último es, necesariamente, 5. Esto se verifica porque al realizar la división entera de los 25 números en esta sección de la pirámide por los 10 dígitos posibles, el residuo es 5.

Al examinar las filas de la 5 a la 10, observamos que cada fila tiene ya más de 10 números. Si quitamos a cada fila los últimos 10, observamos que se habrán quitado, una vez por fila, cada dígito (como se muestra en la figura). Los números restantes serán 25, puesto que el residuo al dividir por 10 es 5; y si comenzamos con el número 6, el último dígito de estos es 0.



Repitamos el proceso con las siguientes secciones. Y observaremos que el comportamiento observado anteriormente se repite. Cada 5 filas podremos quitar cada dígito una vez más que en la quíntupla anterior. Y también en cada sección de 10 dígitos habrá 50 dígitos fuera de tales quíntuplas. Dado que 50 es divisible por 10 y estos dígitos que quedan comienzan por uno, entonces el último dígito que queda de las 10 filas es 0.

De las observaciones anteriores se sigue que para obtener la suma de los dígitos de la fila número 2013 habrá que obtener la suma de los dígitos que quitamos en esa sección y sumar a ésta los números que se mantienen.

La fila 2013 tendrá en total $2(2013) - 1 = 4025$ dígitos. Este número da por residuo 5 cuando se divide por 10. De esto se sigue que en esta fila aparecen 4020 veces los 10 dígitos de forma consecutiva. La suma de todos estos dígitos será $402 * \sum_{i=0}^{i=9} i = 402 * 45 = 18090$

Para obtener los últimos 5 dígitos, observemos la posición que 2013 ocupará en la sección que le corresponde. Así, observemos que $2013 = 201(10) + 3$. Por tanto, 2013 ocupará la posición 3 de su sección. Esto implica que la suma de los dígitos faltante será $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$.

Esto implica que la suma total de los dígitos de la fila 2013 será igual a $18090 + 35 = 18125$.

Problema 1.18.

En el patrón de números que se muestran, cada fila comienza con un 1 y termina con un 2. Los demás números son iguales a la suma de los dos números situados inmediatamente arriba.

Por ejemplo, en la cuarta fila 9 es la suma de 4 y 5. Si se continúa construyendo las filas siguientes con este mismo patrón, ¿cuál es la suma de todos los números de la decimotercera fila?

1	2				
1	3	2			
1	4	5	2		
1	5	9	7	2	
1	6	14	16	9	2

Solución 1 del Problema 1.18.

Se efectúa la suma de cada una de las filas conocidas, de la forma siguiente:

						Suma
1	2					3
1	3	2				6
1	4	5	2			12
1	5	9	7	2		24
1	6	14	16	9	2	48

Al observar los resultados de esas sumas nos damos cuenta que todos los valores obtenidos son múltiplos de 3 y el valor siguiente es el doble del anterior. Por lo tanto, cada una de estas sumas será múltiplo de una potencia de dos más que la anterior. Entonces, verificamos que la primera fila tiene por suma $3 * 1 = 3 * 2^{0} = 3$; la segunda fila suma $3 * 2 = 3 * 2^{1} = 6$; la tercera $3 * 4 = 3 * 2^{2} = 12$; la cuarta $3 * 8 = 3 * 2^{3} = 24$; y así sucesivamente.

El términos generales, la suma de cada fila n viene dada por $f(n) = 3(2^{n-1})$. Por lo tanto, para la decimotercera fila, la suma será:

$f(13) = 3 * 2^{13-1} = 3 * 2^{12} = 12,288$.

Solución 2 del Problema 1.18.

Observemos que en cada fila, exceptuando la primera, cada uno de los números de la fila anterior está sumado dos veces, uno por cada número inmediatamente abajo. En la fila siguiente, aparecerá sumado el doble de veces que en la anterior.

Si consideramos el número 1 de la primera fila, éste aparecerá 2 veces en la suma de la segunda fila, cuatro veces en la tercera, etc. Por tanto, el 1 original aparecerá sumado 2^{n-1} veces en la n-ésima fila.

Consideremos el número 2 de la primera fila. Éste aparecerá sumado 2 veces en la segunda fila, 4 veces en la tercera fila, y así sucesivamente. Por lo tanto, en la $n-ésima$ fila aparecerá sumada $2 * 2^{n-1} = 2^{n}$ veces. Entonces, la suma de los dígitos de la fila número 13 será: $2^{12} + 2^{13} = 12{,}288$.

Problema 1.19.

¿Cuánto suman los dígitos de la cantidad $4^{1007} * 5^{2014}$?

Solución del Problema 1.19.

$4^{1007} * 5^{2014} = 4^{1007} * 5^{1007} * 5^{1007} = (4 * 5)^{1007} * 5^{1007} = (20)^{1007} * 5^{1007}$. Lo que es igual a $(20 * 5)^{1007} = 100^{1007} = \left(10^{2}\right)^{1007} = 10^{2014}$. Este número tendrá entonces un uno seguido por 2014 ceros. Por lo tanto la suma de las cifras de $4^{1007} * 5^{2014}$ es 1.

Problema 1.20.

¿Cuál es el dígito de las unidades de 7^{2012}?

Solución 1 del Problema 1.20.

Observemos los últimos dígitos de varias potencias de 7:

Exponente	Potencia	Último dígito
1	$7^1 = 7$	7
2	$7^2 = 49$	9
3	$7^3 = 343$	3
4	$7^4 = 2401$	1
5	$7^5 = 16807$	7
6	$7^6 = 117649$	9
7	$7^7 = 823543$	3
8	$7^8 = 5764801$	1
9	$7^9 = 40353607$	7
10	$7^{10} = 282475249$	9
11	$7^{11} = 1977326743$	3
12	$7^{12} = 13841287201$	1
13	$7^{13} = 96889010407$	7

Observando estos resultados nos damos cuenta que los últimos dígitos de las potencias se repiten siguiendo el patrón: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7,... es decir, se repiten los dígitos en grupos de 4. Vamos a dividir el exponente 2,012 entre 4, para saber cuántos grupos de 4 completos se han formado $2{,}012 \div 4 = 503$. Es decir, hay 503 grupos de cuatro. Además, como no hay residuo, 2012 será el último número del grupo de cuatro al que pertenece. Por lo tanto, el digito final de 7^{2012} es 1.

Solución 2 del Problema 1.20.

Observemos que si dividimos un entero a entre un entero b tendremos que $a = kb + c$ Donde k es un cociente entero de la división y c es un residuo. La relación entre el dividendo, el divisor, y sus residuos de división entera se pueden expresar usando una notación especial: $a \equiv c\, mod[b]$. Esta expresión se lee: "a es congruente con c en módulo b".

Observemos también que si luego queremos obtener una expresión para a^2dividido por b, tendremos:

$a^2 = (kb + c)^2 = k^2b^2 + 2kbc + c^2 = (k^2b + 2kc)b + c^2 = k_ib + c^2$. Observemos que en este caso k_i que es un entero, es cociente de dividir a^2 por b. Por lo tanto podemos concluí que $a^2 \equiv c^2\ mod[b]$.

Esta propiedad la puede utilizar para explorar el problema propuesto. Observemos que al dividir por 10, el menor residuo entero será el último dígito del número. Así tenemos: $7 \equiv 7\ mod[10]$

Al elevar esta expresión al cuadrado, tendremos: $7^2 \equiv 7^2\ mod[10] \Longrightarrow 7^2 \equiv 49\ mod[10] \Longrightarrow 7^2 \equiv 9\ mod[10]$. En este caso llegamos a la conclusión de que 49 era un residuo. Sin embargo, este todavía contiene el factor 10 cuatro veces, por tanto no es el residuo menor. 9 si lo es. Si repetimos este proceso con el nuevo resultado tendremos $(7^2)^2 \equiv 9^2\ mod[10] \Longrightarrow 7^4 \equiv 81\ mod[10] \Longrightarrow 7^4 \equiv 1\ mod[10]$. Puesto que el residuo de 7^4 dividido entre 10 es 1, entonces el residuo de dividir cualquier potencia de 7^4 por 10 dará como resultado siempre 1 (al elevar 1 a cualquier potencia obtendremos siempre 1).

Dado que $7^{2012} = (7^4)^{503}$, el residuo de dividir 7^{2012} por 10 será 1. Por tanto, el último dígito de 7^{2012} es 1.

Problema 1.21.

¿Cuál es la cantidad de números de tres dígitos que no contienen el cero y uno de los dígitos es la suma de los otros dos?

Solución del Problema 1.21.

Si iniciamos con el dígito 1 en las centenas, en las decenas podemos escribir 7 dígitos diferentes de modo que la suma sea 9 o menor. Con cada una de estas siete combinaciones se pueden formar 6 combinaciones diferentes con los mismos dígitos, lo que nos lleva a tener $7 * 6 = 42$ combinaciones y le agregamos las 3 cantidades cuando se repite el dígito 1. Si iniciamos con la cifra 2 en las centenas, para las decenas hay 5 cifras posibles que dan cinco combinaciones. Con cada una de éstas se pueden formar seis cantidades diferentes, por lo que se tiene $6 * 5 = 30$ formas y agregamos las 3 cantidades cuando se repite el "2".

Si iniciamos con la cifra 3 en las centenas, para las decenas hay 3 cifras posibles que dan tres combinaciones. Con cada una de éstas se pueden formar seis cantidades diferentes, por lo que se tiene $6 * 3 = 18$ formas y agregamos las tres cantidades cuando se repite el dígito 3. Si iniciamos con la cifra 4 en las centenas, para las decenas hay 1 cifra posible que da una combinación, pero con ésta se pueden formar seis cantidades diferentes, por lo que se tiene 1 por 6 formas y agregamos las 3 cantidades cuando se repite el dígito 4. Por lo tanto, se tienen: 45 + 33 + 21 + 9 = 108 cantidades que cumplen las condiciones dadas.

Problema 1.22.

¿Cuál es el número de enteros entre 100 y 400 que contienen el digito 2?

Solución 1 del Problema 1.22.

Veamos cómo es el comportamiento de estos enteros en el rango del intervalo dado, para ver el número de dígitos en el cuadro siguiente:

Valores que se encuentran en el intervalo de 100 y 199		
Entre	digito	# de dígitos dos
100	109	1
110	119	1
120	129	10
130	139	1
140	149	1
150	159	1
160	169	1
170	179	1
180	189	1
190	199	1

Tenemos un total de 19 números enteros entre $100 - 99$. Para el rango de 200 al 299, existirá 100 veces el digito dos. En el rango de 300 al 400, el número de dígitos con número dos es 19. Al sumar todos los enteros en el rango comprendido de $100 - 400$ tenemos que $19 + 100 + 19 =$ 138.

Solución 2 del Problema 1.22.

Por simplicidad podemos obviar el número 400 que no tiene dígito 2. Utilicemos el principio de la multiplicación para los números entre 100 y 399 que tienen el dígito dos una sola vez.

Estas serán: $1*9*9+2*1*9+2*9*1=117$. Los números que contienen el dígito dos exactamente dos veces serán: $1*1*9+1*9*1+2*1*1=20$. Además, hay un sólo número que tiene al dígito 2 tres veces, es decir el 222. Al sumar los resultados anteriores, obtenemos la cantidad de números entre 300 y 400 que tienen al dígito dos: 138.

Problema 1.23.

¿Cuántos números de tres dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es 13 y el producto de estos es mayor que 60?

Solución del Problema 1.23.

Sean los tres dígitos A, B, C, dadas las siguientes condiciones:

Las siguientes ternas cumplen la condición que $A+B+C=13$

A	B	C
1	3	9
1	4	8
1	5	7
1	6	6
2	2	9
2	3	8
2	4	7
2	5	6
3	3	7
3	4	6
3	5	5
4	4	5

Con estas ternas probamos cuáles cumplen la segunda condición:

$$(A)(B)(C)>60$$

A	B	C	Producto
1	3	9	27
1	4	8	32
1	5	7	35
1	6	6	36

A	B	C	Producto
2	2	9	36
2	3	8	48
2	4	7	56
2	5	6	60
3	3	7	63
3	4	6	72
3	5	5	75
4	4	5	80

Como podemos ver en la tabla 2, las últimas 4 combinaciones de dígitos generan un producto mayor que 60.

En estas ternas algunas repiten dos de sus dígitos. Para cada una de estas ternas habrá tres enteros diferentes que cumplen con las dos condiciones. Esto es, una para cada posición que puede ocupar la cifra no repetida. Así, para la terna $(3,3,7)$ los números que pueden formarse son: 733, 373 y 337. Dado que hay tres ternas como ésta, entre las seleccionadas anteriormente, en total sumarán 9 números de 3 cifras que cumplen ambas condiciones.

Para la terna sin repetición de dígitos, tendremos tres dígitos que pueden ocupar la primera posición. Luego de colocar el primero tendremos dos dígitos posibles para la segunda posición y uno restante para la tercera. Por lo tanto, tendremos un total de $3*2*1 = 6$ números de 3 cifras formados con estos dígitos. Por ejemplo, para la terna (3,4,6) podemos formar los números: 346, 364, 436, 463, 634 y 643. Entre las ternas seleccionadas hay sólo una sin repetición.

Lo anterior demuestra que en total habrá 15 números de tres cifras, cuya suma de sus dígitos será 13 y su producto mayor que 60.

Problema 1.24.

¿Cuántos números enteros de tres dígitos hay que, al multiplicarse sus dígitos, dan un producto que es mayor que 60 y menor que 65?

Solución del Problema 1.24.

Sea $\overline{xyz}$ un número de tres dígitos cuyo producto es tal que $60 < xyz < 65$. El valor de xyz podría ser 61, 62, 63 o 64. Analicemos cada uno de estos casos.

Nótese que el número 61 es primo. Por ello, es imposible que el producto xyz resulte en 61. El número 62 tiene como factores primos 31 y 2. Ambos son números primos. 2 es ya un dígito, pero no hay forma de expresar 31 como producto de dos dígitos. Por tanto, el producto xyz no puede ser 62.

63 puede descomponerse en factores primos como $63 = 3 * 3 * 7$. De aquí deducimos que 63 puede ser el producto de números que tengan por dígitos los conjuntos $(3,3,7)$ y $(1,7,9)$. Para la primera tríada tendremos tres posibilidades, una por cada posible posición del dígito no repetido $(337, 373\ y\ 733)$. Para la segunda tríada tendremos seis posibilidades $(179, 197, 719, 791, 917, 971)$. En total se pueden formar 9 números de tres dígitos tal que el producto de sus dígitos es 63. Para calcular este número pudimos también utilizar el principio de la multiplicación. Desde esa perspectiva, decimos que di colocamos primero el dígito de las centenas tenemos tres posibles dígitos. Para cada uno de estos, tenemos dos opciones restantes para el dígito de las decenas. Una vez colocados dos dígitos, solo tenemos uno para las unidades. Entonces, el número de posibilidades para la segunda tríada es de $3 * 2 * 1 = 6$.

Tenemos que $64 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$. Con seis factores 2 podemos armar las tríadas de dígitos: $(2,4,8), (1,8,8)\ y\ (4,4,4)$. De forma análoga al conteo de las tríadas anteriores, con la primera tríada podemos formar 6 diferentes números de tres cifras. Con los dígitos de la segunda tríada podemos formar 3. Para la última tríada, hay un solo número de tres cifras posible, el 444. En total es posible formar 10 números de tres cifras con dígitos cuyo producto es 64.

En conclusión, existen 19 números enteros de tres dígitos que al multiplicarse dan un producto mayor que 60 y menor que 65.

Problema 1.25.

¿Cuántos números enteros impares positivos menores que 1000 tienen la propiedad de que el producto de sus dígitos es 252?

Solución del Problema 1.25.

Comenzaremos por busca tríadas de dígitos que cumplan la condición que su producto sea 252. Nótese que $252 = 2 * 2 * 3 * 3 * 7$. Observemos también que entre estos los siguientes productos resultan en números dígitos: $2 * 2 = 4$, $3 * 3 = 9$, $2 * 3 = 6$. Por lo tanto, podemos formar dos tríadas de números que cumplen la condición: $(6,6,7)$ y con $(9,4,7)$. Para la primera tríada tendremos $\frac{3!}{2!} = 3$ posibilidades: 667, 676 y 766.

Para la segunda tríada tendremos $3! = 6$ posibilidades: 947, 974, 794, 497, 479 y 749. Esto hace un total de 9 números de tres dígitos que cumplen las condiciones. Observemos también que este número no puede ser de dos dígitos. Puesto que el mayor producto posible en ese caso es $9 * 9 = 81$. Entonces, en total hay 9 números menores que 1000 tal que el producto de sus dígitos es 252.

Problema 1.26.

Jerry escribió todos los enteros positivos que tienen un máximo de 7 dígitos y contiene sólo los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas veces tuvo que anotar el dígito 1?

Solución 1 del Problema 1.26.

Analicemos los enteros de 1, 2, 3,..., 6, y 7 cifras que cumplen estas condiciones. Con los números de un dígito sólo cumple el 1. Con los números de, a lo más 2 cifras, tenemos que la cantidad de números que podemos formar son $2^2 = 4$ y esos son: 00, 01, 10 y 11. El número 00 no cumple las condición de ser entero positivo, pero al incluirlo no cambia la cuenta de dígitos 1. En total hay $2^2 = 4$ combinaciones diferentes en los cuales se han utilizado 4 dígitos 1.

Ahora estudiemos los números con a lo sumo 3 cifras. Estos serán 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. La cantidad de números de 3 cifras que podemos formas con ceros y unos son $2^3 = 8$. En estas combinaciones se utilizan 12 dígitos 1.

Ahora observemos los enteros de 4 cifras. Las combinaciones posibles de ceros y unos son: 0000, 0001,0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 y 1111. La cantidad de números de 4 cifras que podemos formar sólo con ceros y unos es: $2^4 = 16$. La cantidad de unos que se han escrito son 32.

Con esto podemos conjeturar que, en su forma general, si tenemos k cifras el número de unos será $k * 2^{k-1}$. Entonces, para 7 dígitos Jerry escribió: $7 * 2^{7-1} = 7 * 2^6 = 448$

Solución 2 del Problema 1.26.

La cantidad de combinaciones de 7 dígitos que podemos armar con dígitos 1 y 0 exclusivamente son $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 128$. Es decir, que para el primer dígito hay dos opciones, igual para la segunda y todas las siguientes. Obsérvese que estas 128 combinaciones ya incluyen los números de menos de cuatro dígitos. En este caso, serían los que comienzan con ceros.

Nótese también que esto no cambia la cantidad de unos que se han escrito, puesto que las cifras más significativas estarían rellenas con ceros. Para obtener la cantidad de unos escritos, observemos que para cada combinación siempre hay otra combinación que tiene los dígitos intercambiados. Así, si una de las combinaciones de 1110100 es parte del conjunto, también lo es 0001011. Estas parejas tienen la propiedad de que las posiciones que en la primera están ocupados por un 1, en la segunda están ocupadas por un 0 y viceversa.

Cada pareja de números complementarios sumará siempre 7 dígitos uno. Dado que podemos formar $\frac{128}{2} = 64$ parejas, el total de números 1 utilizados para escribir todas las combinaciones será $64 * 7 = 448$.

Problema 1.27.

¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 5^{2013}?

Solución del Problema 1.27.

Escribamos algunos casos particulares: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125$. Obsérvese que los últimos dos dígitos de las potencias a partir de 5^2 son 2 y 5. Y en apariencia, esto se repite para todas las potencias. Así, podemos conjeturar que los dos últimos dígitos de 5^{2013} son 2 y 5, en ese orden.

Ahora buscaremos una demostración inductiva que nos permita verificar que esto ocurre para todos los casos. Ya verificamos que para n=2, se cumple que los últimos dos dígitos serán 2 y 5. Asumamos que esta propiedad se cumple para un n cualquiera. Es decir que: $5^n = \overline{a_k a_{k-1} \dots 25}$. La descomposición en potencias de 10 se puede entonces escribir como $5^n = a_k * 10^k + \cdots + a_2 * 10^2 + 2 * 10^1 + 5 * 10^0$. Ahora veamos cual sería la terminación de 5^{n+1}:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= (a_k * 10^k + a_{k-1} * 10^{k-1} + \cdots + a_2 * 10^2 + 2 * 10^1 + 5 * 10^0) * 5 \\ &= 5(a_k * 10^k) + \cdots + 5(2 * 10^1) + 5(5 * 10^0) \\ &= 5a_k * 10^k + \cdots + 5a_2 * 10^2 + 10 * 10^1 + 25 * 10^0 \\ &= 5a_k * 10^k + \cdots + 5a_2 * 10^2 + 10^2 + 2 * 10^1 + 5 * 10^0 \end{aligned}$$

Las dos potencias de 10 menores están ambas multiplicadas por 2 y 5. Es decir, que los últimos dos dígitos serán 2 y 5 para cualquier exponente mayor que 2 si esta es la terminación del anterior. Dado que $5^2 = 25$, esta propiedad se cumple para cualquier 5^n con n mayor o igual que 2. Por lo tanto, los últimos dos dígitos de 5^{2013} serán 2 y 5.

Problema 1.28.

¿Cuántos números de 5 dígitos con todos los dígitos distintos de cero y no repetidos son divisibles por 25?

Solución del Problema 1.28.

Para que un número sea divisible por 25, el dígito de las unidades puede ser únicamente 0 o 5. Si es cero, el dígito de las decenas también debe ser 0 o 5. Si es cinco el dígito de las decenas debe ser 2 o 7. Como solo nos interesan los números que no incluyan al cero, descontamos la posibilidad de que termine en cero. Para los restantes, podemos aplicar el principio de la multiplicación: $7 * 6 * 5 * 2 * 1 = 420$

Primero fijamos la última posición ya que dijimos que debe ser 5; luego, para la penúltima posición, tenemos el 2 o el 7. Así que tenemos dos opciones. Para el primer dígito tenemos 7 opciones, porque ya utilizamos dos dígitos (y no pueden repetirse) y ningún dígito puede ser cero.

Para el segundo dígito tenemos 6 opciones y para el tercero nos quedan 5. Multiplicamos $7 * 6 * 5 * 2 * 1 = 420$.

Problema 1.29.

Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100 que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

Solución del Problema 1.29.

Primero pensemos en la naturaleza de los números que cumplen con la condición de tener exactamente tres divisores positivos. Todos los números enteros tienen como mínimo al 1 y a sí mismos como divisores.

Los números primos tienen únicamente estos dos divisores. Por lo tanto, los números primos no satisfacen las condiciones. Si un número tiene a dos primos diferentes como divisores, éste será divisible por sí mismo, por 1, y por cada uno de sus divisores primos. En total, tendrá cuatro divisores. Si el número es divisible por más de dos primos, el número de divisores será todavía mayor. Por tanto, el número no puede ser primo, ni múltiplo de dos primos diferentes. Si es múltiplo de más de dos primos, habrá incluso más divisores.

Por lo tanto, si existen números que cumplen las condiciones, éstos no pueden ser primos, y tienen que ser divisibles por un sólo primo. Los únicos números de este tipo son las potencias de números primos. Así por ejemplo, para un número primo k, k^2 tiene por divisores a 1, k y a k^2. Por tanto, los cuadrados de primos satisfacen las condiciones. Las potencias mayores que dos no cumplen, puesto todas las potencias inferiores también serán también divisores.

Así, los números enteros que cumplirán las condiciones de este problema deben ser cuadrados de primos que resulten menores que 100. Por tanto, el conjunto de números que cumplen será $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\}$. Entonces, el producto p de los números que cumplen las condiciones será $p = 2^2 * 3^2 * 5^2 * 7^2 = 44{,}100$. Éste es, además, un cuadrado perfecto pues es un producto de cuadrados perfectos.

Problema 1.30.

Encuentre todos los enteros positivos menores que 2013 y que no son divisibles por 3.

Solución del Problema 1.30.

La suma de todos los números enteros entre 1 y 2013 es $\boldsymbol{S} = 1 + 2 + \cdots + 2013 = (2012+1)\frac{(2012)}{2} = 2025078$. Los números divisibles por 3 son de la forma $a_n = 3n$, el primer múltiplo de 3 en el conjunto es 3 y el último es $2{,}010 = 670 * 3$. Por tanto, los múltiplos de 3 que consideraremos serán todos los números enteros entre 1 y 670 multiplicados por 3. Por tanto, la suma de los múltiplos de tres que consideraremos será $\boldsymbol{p} = 3\left((670+1)\frac{670}{2}\right) = 674{,}355$.

Para calcular la suma de todos los enteros menores que 2013, excluyendo a los múltiplos de 3, sustraeremos la suma de los múltiplos de tres de la suma de todos los enteros en el intervalo. Entonces, la suma que buscamos es $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{p} = 2025078 - 674{,}355 = 1350723$.

Problema 1.31.

¿Es posible armar una colección de 7 o más enteros positivos tales que no haya dos cuya suma o diferencia sea divisible por 11?

Solución del Problema 1.31.

Observemos que el residuo de dividir la suma o resta de dos números por 11, es igual a la suma o resta de los residuos de dividir cada uno de estos números independientemente por 11. Verifiquemos la veracidad de esta conjetura. Tomemos por ejemplo los enteros S y P, dos número con residuos d y e, respectivamente, al dividirse por 11. Para algunos cocientes k y u, tendremos que $S = 11k + d$ y $P = 11u + e$. Luego tendremos que para un entero w podemos expresar: $S + P = 11(k+u) + (d+e) = 11w + (d+e)$. En este caso $d + e$ es un residuo de dividir la suma $S + P$ por 11.

Por lo tanto, el residuo de la suma o resta de S y P al realizar la división entera por 11 es equivalente a la suma o resta de los residuos de cada uno de los números.

También observemos que si dos números tienen el mismo residuo al ser divididos por 11, la diferencia de estos números dará por residuo cero al dividir por 11 (dejaremos a la lectora la responsabilidad de realizar la demostración que puede hacerse de forma análoga a la anterior).

Para cantidades enteras, los posibles residuos de la división entera por 11 son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10. Estos son los posibles valores de d y e. Nosotros buscaremos los valores para d y e que al sumarse den 0 o múltiplo de 11.

Esto lo cumplen las parejas (0, 11), (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) y (5, 6). Si escogemos dos números cuyos residuos al dividir por 11 estén en la misma pareja, la suma de estos números será divisible por 11.

Dado que tenemos 6 parejas, podemos escoger 6 números enteros con residuos que pertenezcan parejas diferentes, de las anteriormente formadas. Con esto nos aseguramos que ningunos dos números tengan por suma un múltiplo de 11. Sin embargo, para escoger el séptimo, no tenemos más opción que escoger un número cuyo residuo sea ya elemento de una pareja incluida anteriormente, o bien un número con residuo igual al de otro número ya escogido, lo que resultaría en que la diferencia entre dos de los números sería divisible por 11. Por lo tanto, es imposible armar una colección de 7 o más enteros positivos tales que para ninguna pareja de estos números su suma o diferencia no sea divisible por 11.

Problema 1.32.

¿Cuál es el más pequeño número primo que divide a $3^{11}+5^{12}$?

Solución 1 del Problema 1.32.

Desarrollemos las potencias de tres: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$. Observamos que el último dígito de las potencias de 3 tienen un patrón 3, 9, 7, 1, periodo cuatro, luego 3^{11} terminará en 7. Ahora, desarrollemos las potencias de cinco: $5^0=1$, $5^1=5$, $5^2=25$, $5^3=125$.

Para las potencias de 5 observamos que sólo cuando tenemos 5^0 terminan en uno y luego todas las demás terminan en cinco; por tanto, la suma de las dos potencias en las unidades termina en un número par, es decir $7+5=12$. El criterio de divisibilidad por dos nos indica que un número que termine en un dígito par, será divisible por dos. Dado que $3^{11}+5^{12}$ es divisible por 2, y 2 es en número primo más pequeño, el menor número primo que divide a $3^{11}+5^{12}$ es 2.

Solución 2 del Problema 1.32.

Observemos que la suma de dos números impares será siempre par. Así, consideremos los dos números impares $i_1 = 2k + 1, i_2 = 2p + 1$. Su suma será $i_1 + i_2 = (2k + 1) + (2p + 1) = 2(k + p + 1)$ que es un número par.

En el caso de $3^{11} + 5^{12}$ ambos sumandos son números impares. Por lo tanto, el resultado de la suma será divisible por dos, que es el número primo más pequeño. Esto asegura que 2 es el menor primo que divide a $3^{11} + 5^{12}$.

Problema 1.33.

El número 2004 tiene 12 divisores, incluyendo a 1 y 2004. ¿Cuántos divisores distintos tiene 2004^4?

Solución del Problema 1.33.

Descomponiendo 2004 en sus factores primos tenemos $2004 = 2^2 * 3 * 167$. Los divisores de 2004 nos resultan 12 porque para el factor 2 hay tres posibles exponentes (0, 1 o 2). Para los factores 3 y 167 hay dos posibles exponentes (0 o 1). Por lo anterior, hay en total $3 * 2 * 2 = 12$ divisores para 2004.

Para encontrar la cantidad de divisores de 2004^4 proseguiremos de forma análoga. La descomposición en factores primos será $2004^4 = 2^8 * 3^4 * 167^4$. Luego, para formar cada divisor con base a los factores anteriores, podremos colocar el número 2 con 9 diferentes exponentes. Los factores 3 y 167 podrán aparecer con 5 exponentes diferentes. Como resultado, tendremos que la cantidad de divisores de 2004^4 será $9 * 5 * 5 = 225$.

Problema 1.34.

¿Cuál es la más grande potencia de 2 que divide a $2^{2012} + 10^{2012}$?

Solución del Problema 1.34.

Consideremos que: $2^{2012} + 10^{2012} = 2^{2012} + (2x5)^{2012} = 2^{2012}\left(1 + 5^{2012}\right)$. El resultado que buscamos, la mayor potencia de 2 que divide a este número, será 2^{2012} más la mayor potencia de 2 que divida a $(1 + 5^{2012})$. Enfoquémonos entonces en encontrar ésta última. Dado que 5^{2012} es impar, al sumarle 1 resulta un par. Por esto sabemos que es divisible por 2. Sin embargo, tenemos que verificar si es divisible por otras potencias de 2. Podemos demostrar esto de forma inductiva.

Observemos que el residuo de la división entera de 5 por 4 es 1. Es decir: $5 = 4C + 1$. Si le agregamos 1 tenemos que: $5 + 1 = 4C + 2$. Esto nos indica que si bien $5 + 1$ es divisible por 2, no lo es por cuatro. Al dividir por 4, el menor residuo positivo será 2. Dado un entero n para el que se cumple que: $5^n + 1 = 4C_n + 2$. Verifiquemos el resultado para n+1. Tendremos: $5^{n+1} + 1 = 5(4C_n + 1) + 1 = 5 * 4C_n + 5 + 1 = 4(5C_n) + 6 = 4(5C_n + 1) + 2 = 4C_{n+1} + 2$.

Lo que resulta en un residuo 2 al ser dividido por 4. De esta forma, demostramos que cualquier potencia positiva de 5 aumentada en uno, será divisible por 2 pero no por 4 y, por tanto, no será divisible por potencias mayores de 2. Como consecuencia, la mayor potencia de 2 que divide a $\left(1 + 5^{2012}\right)$ es 2^1.

Por tanto, la mayor potencia de 2 que divide a $2^{2012} + 10^{2012}$ es 2^{2013}.

Problema 1.35.

¿Cuál es el número de subconjunto de 7 elementos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para los cuales la suma de sus elementos es un múltiplo de 3?

Solución del Problema 1.35.

En el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, observemos que los residuos de cada uno de estos elementos al ser divididos por 3 son: 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2 y 0 respectivamente. Para que el resultado de multiplicar los elementos en un subconjunto resulte en un múltiplo de 3, la suma de los residuos de los elementos de ese subconjunto debe ser igual a cero o múltiplo de 3.

Procedamos tratando de armar subconjuntos que cumplan con esta última propiedad. Si armamos un subconjunto que contenga un sólo número de residuo 0, para formar el subconjunto de 7 números todavía tenemos que escoger 6 números. Únicamente tenemos a disposición tres números de residuo 1 y tres números de residuo 2.

Por lo tanto, ese es el único subconjunto posible con un número de residuo cero incluido. Puesto que estamos utilizando todos los números con residuo 1 y 2 hay sólo una forma de escogerlos. Para el número de residuo 0, sin embargo, tenemos 3 posibilidades. Por lo tanto, de aquí obtenemos 3 subconjuntos de A que cumplen los requerimientos establecidos.

Consideremos ahora un subconjunto con dos números de residuo cero incluidos. Tenemos todavía 5 posiciones que llenar. Podemos hacerlo con combinaciones que obtengamos de entre 3 números de residuo 2 y 3, números de residuo 1 que tenemos disponibles. Sin embargo, es imposible armar con los residuos restantes una combinación que sume cero o múltiplo de 3. Si utilizamos tres de residuo 2 y dos de residuo 1, suman 8. Si utilizamos dos de residuo 2 y 3 de residuo 1, suman 7.

Si consideramos tres números de residuo cero, entonces tenemos que llenar cuatro posiciones restantes. Para hacerlo tenemos varias posibilidades. Procediendo de forma similar a la anterior, podemos verificar que cuando colocamos tres cantidades con residuo 2 no hay forma de lograr que los residuos sumen cero o múltiplo de 3. Lo mismo ocurre cuando colocamos una cantidad de residuo 2 y tres de residuo 1. Los residuos de estas suman 5.

Si colocamos dos cantidades de residuo 2, dos de residuo 1 suman 6. Por lo tanto este es un arreglo que funciona. Tenemos $C_2^3 = 3$ formas de seleccionar los dos números de residuo 2 entre los 3 disponibles.

De igual forma tenemos $C_2^3 = 3$ formas de seleccionar los dos números de residuo 1. Hay además una sola forma de seleccionar los tres números de residuo 0, puesto que estamos utilizando todos los números con residuo cero disponibles. Por lo tanto, la cantidad de subconjuntos con tres números de residuo cero que podemos formar es $3 * 3 * 1 = 9$.

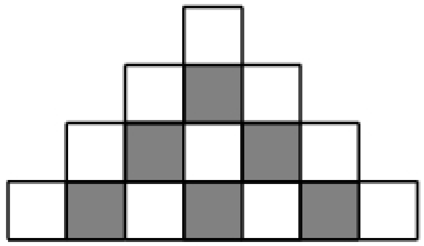
Es imposible formar un subconjunto que no contenga algún número con residuo 0 al ser dividido por 3. Esto, porque entonces tendríamos que llenar 7 posiciones con los demás números y sólo tenemos 6 disponibles.

Entonces, con los elementos del subconjunto A, se pueden formar un subconjunto que contiene tres múltiplos de 3 (de residuo 0 al dividirse por 3).

Se pueden formar también 9 subconjuntos que contienen un sólo número de residuo 0. Por lo tanto, en total podemos armar 10 sub-conjuntos cuya suma sea múltiplo de 3.

Problema 1.36.

La siguiente figura es construida con cuadrados alternados en blanco y negro en cada fila. Todas las filas comienzan y terminan con un cuadrado blanco. ¿Cuál es el número de casillas negras en la fila 37?



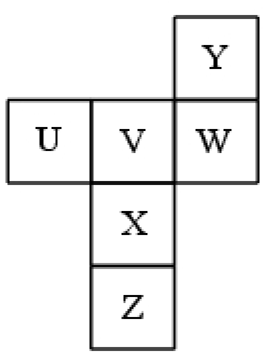
Solución del Problema 1.36.

Al observar el dibujo nos damos cuenta que en la fila 1 comenzamos con un cuadrado. En adelante, en cada fila se agregan dos casillas más que en la anterior, una negra y una blanca. Así, la fila 2 tendrá 3 casillas, la fila 3 tendrá 5, etc. De ahí observamos que para una fila n, el número de casillas que contendrá será $2n-1$.

En cada fila, los cuadros son alternos, pero habrá siempre una casilla blanca más que la cantidad de negras. Así, habrá en cada fila n blancas y $n-1$ negras. En la fila 1 habrá 0 casillas negras; en la fila 2 habrá 1 casilla negra; en la fila 3 habrá 2 casillas negras, y así sucesivamente. Por lo tanto, en la fila 37 habrán 36 casillas negras.

Problema 1.37.

Con un trozo de papel que contiene seis cuadrados unidos, etiquetados como se muestra en el diagrama, se forma un cubo. ¿Cuál es la cara opuesta a la marcada con X?

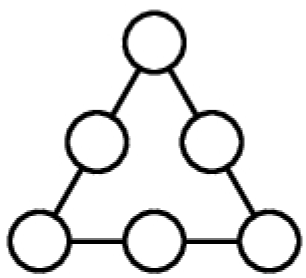


Solución del Problema 1.37.0

Para poder resolver este problema se debe tener una visión espacial de la situación. Primero doblemos las caras contiguas a v. Estas son U, W y X. La cara que sea opuesta a X, tendrá una cara que coincidirá con la cara superior de V. Además debe coincidir con la cara superior de W. Ya hay una cara que coincide con la cara superior de W, esta es Y. Por lo tanto, la cara opuesta a X es Y.

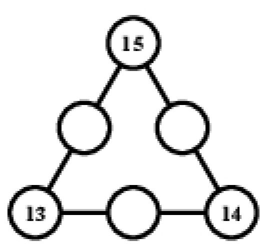
Problema 1.38.

En un triángulo mágico, cada uno de los seis números enteros entre 10 y 15 se coloca en uno de los círculos, de modo que la suma S de los tres números de cada lado del triángulo es la misma. ¿Cuál es el valor más grande posible para S?

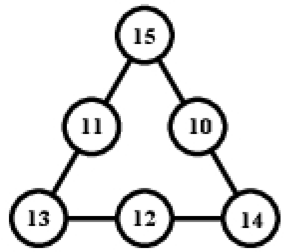


Solución del Problema 1.38.

Observemos que en el triángulo, los valores colocados en los vértices se contarán en la suma de dos de los lados. Para maximizar la suma final, conviene que coloquemos en estas posiciones los valores más grandes. Como se muestra:



Luego, podemos colocar los otros valores de forma que las tres sumas resulten iguales. En este punto, las sumas de los valores de los lados son de 27, 28 y 29. Los valores que faltan por ubicar son 10, 11 y 12. Ubicándolos en orden inverso a las sumas, es decir el mayor valor con la suma menor, logramos ubicarlos de modo que las sumas finales sean iguales para cada lado. Al final los valores nos quedan así:



Problema 1.39.

Las figuras 0, 1, 2, y 3 constan de 1, 5, 13, y 25 respectivamente. Si el patrón se continúa, ¿cuántas unidades cuadradas habría en la figura 2013?

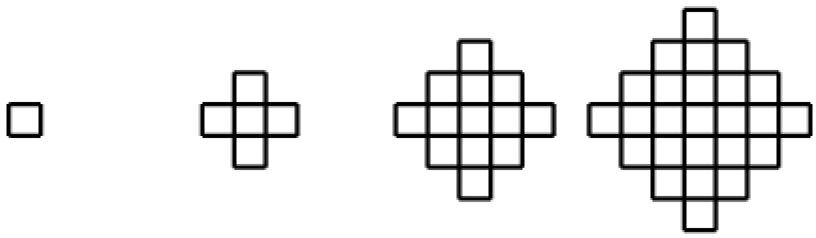
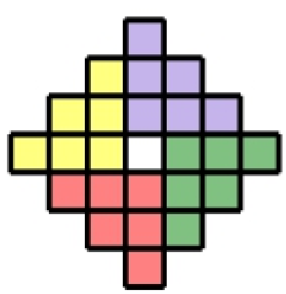


Figura 0 **Figura 1** **Figura 2** **Figura 3**

Solución del Problema 1.39.

Podemos inferir la forma general, para la suma total de cuadrados, observando una descomposición de la imagen en cuatro partes. Estas muestran claramente la sumatoria de enteros de 1 a n en cada uno de los cuatro lados de la figura generada, más el cuadro del centro. En la siguiente figura, con $n = 3$, por ejemplo.



Debido a la forma de construcción de las figuras, para formar la figura $n + 1$, habrá que sumar a cada una de estas cuatro partes $n + 1$. Por lo tanto, la suma de cada una de ellas será igual a cuatro veces la suma de todos los números desde 0 hasta $n+1$. Más el cuadro del centro.

Por lo tanto, la forma general será: $S_n = 4\frac{n(n+1)}{2} + 1$. De lo cual deducimos que la cantidad de cuadrados necesarios para construir la figura 2,013 será: $S_{2013} = 4\frac{2{,}013(2{,}013+1)}{2} + 1 = 8{,}108{,}365$.

Problema 1.40.

Dadas las figuras siguientes, en los que la figura $n+1$ se obtiene a partir de la figura n mediante la adición de dos cuadrados, uno vertical y el otro horizontal. ¿Cuál es el número de cuadrados en la figura 2013?

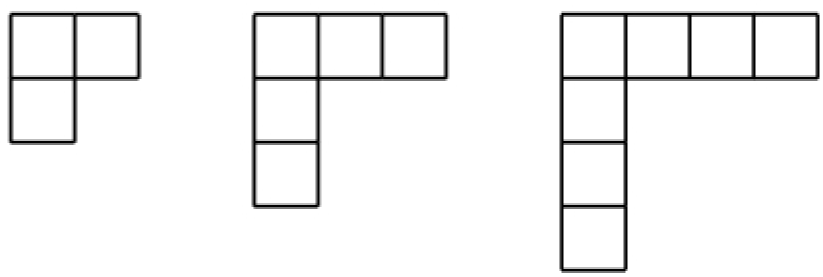
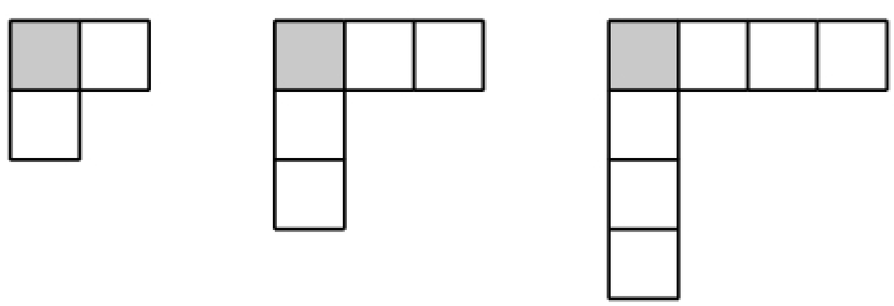


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

Solución del Problema 1.40.

Observemos que las figuras presentadas obedecen a un patrón. Cada una tiene un cuadro que sirve de vértice (marcado en gris a continuación).

Además, para la figura con ordinal n, en dos de sus lados se extiende una cantidad n de cuadrados. Esto hace un total de $2n+1$ cuadrados.



Podemos fácilmente verificar que esto se cumple para los valores que conocemos:

Término (n)	Aplicando forma general	Número de cuadrados
1	$2(1)+1$	3
2	$2(2)+1$	5
3	$2(3)+1$	7
4	$2(4)+1$	9

Con base a esto podemos concluir que la cantidad de cuadrados para la figura con ordinal 2013 viene dada por $2(2013)+1=4{,}027$. Por lo tanto la figura 2013 tiene 4027 cuadrados.

Problema 1.41.

¿Es posible enumerar, del 1 al 12, las aristas de un cubo de tal forma que la suma de las tres aristas que coinciden en un sólo vértice sea siempre la misma?

Solución del Problema 1.41.

Asumamos que sí se pueden colocar los números en las aristas de modo que la suma de los valores de las aristas que coinciden en un sólo vértice sea s. En este caso, la suma total de los valores de los vértices será 8s, puesto que hay 8 vértices en el cubo. Observemos también que en la suma de todos los vértices, el valor de cada arista está sumado dos veces, una por cada extremo. Por tanto, la suma total será igual a $2(1+2+\cdots+12)=2\left(\frac{(12+1)12}{2}\right)=156$.

Esto quiere decir que $8s=156 \implies s=\frac{39}{2}$. Esto es absurdo pues la suma de dos enteros tiene que ser también entera. Por lo tanto, es imposible enumerar las aristas de un cubo de tal forma que la suma de los valores de las aristas que coinciden en un sólo vértice sea siempre la misma.

Problema 1.42.

María salió a correr durante 2 horas. Su recorrido empezó en un terreno plano donde su velocidad fue de $5\ km/h$ y siguió en un terreno inclinado donde su velocidad fue de 3km/h. Regresando por el mismo lugar, la velocidad en la parte inclinada fue de 6 km/h mientras que la velocidad en la parte plana fue de $4\ km/h$. ¿Cuál es la distancia total que recorrió María?

Solución del Problema 1.42.

Llamemos x a la distancia recorrida en el terreno plano y y a la distancia recorrida en el terreno inclinado. En base a la información provista tenemos que $2=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{x}{4}=\frac{3x+4y+2y+3x}{12}=\frac{6x+6y}{12}=\frac{x+y}{2}$. Por lo tanto, el recorrido de $x+y$ será $x+y=4$. Dado que queremos encontrar el recorrido total, es decir, de ida y regreso, la distancia total será el doble de $x+y$. Por tanto, la distancia total que recorrió María fue de 8 kilómetros.

Problema 1.43.

Asuma que m y n son números enteros tales que $5m + n = 100$. ¿Cuál es el valor más grande posible para mn?

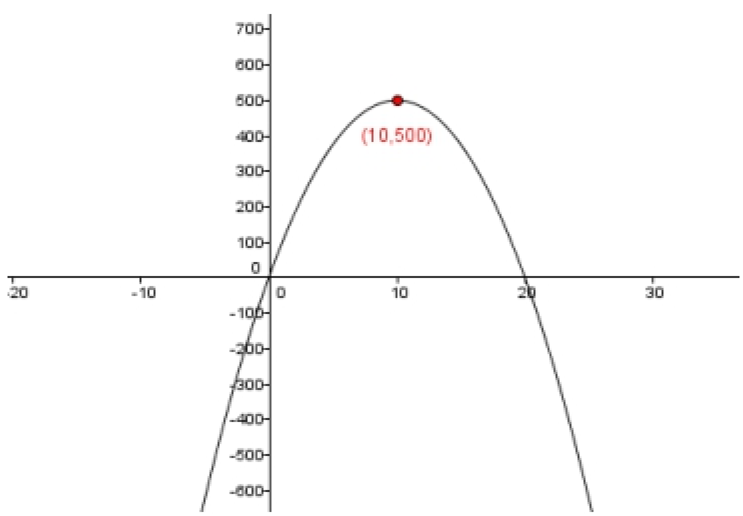
Solución del Problema 1.43.

Notemos que $5m + n = 100 \Longrightarrow n = 100 - 5m$, y sustituyendo en la expresión queda así:

$$mn = m * (100 - 5m) = -5(m^2 - 100m) = -5(m^2 - 20m + 100 - 100)$$

$= -5(m-10)^2 + 500$ De donde se deduce que: $mn = -5(m-10)^2 + 500$. Notemos que esta cantidad tiene un máximo valor cuando $-5(m-10)^2$ es 0, lo cual ocurre en $m = 10$, Así, el valor máximo para $m * n$ es 500. Este valor ocurre cuando $m = 10$ y $n = 50$.

Nota: si suponemos $y = -5(x-10)^2 + 500$, resulta que alcanza su máximo en el punto (10, 500), su vértice.



Problema 1.44.

Definimos una función f tal que, si x es un número divisible por 10, entonces $f(x) = \frac{x}{10}$; y si x no es un número divisible por 10, entonces $f(x) = x + 1$.

¿Cuál es el n más pequeño tal que $a_n = 1$ sabiendo que $a_0 = 1993$ y $a_{n+1} = f(a_n)$?

Solución del Problema 1.44.

Vamos a hacer reiteradas veces cada una de las combinaciones de $f(x)$ para encontrar los divisibles por 10. El n más pequeño es el subíndice de a. Tenemos $a_0 = 1993$ y f(x) = x + 1.

De aquí deducimos que: $a_1 = f(a_0) = a_0 + 1 = 1993 + 1 = 1994$; $a_2 = f(a_1) = f(1994) = 1995$; $a_3 = f(a_2) = f(1995) = 1996$; $a_4 = f(a_3) = f(1996) = 1997$; $a_5 = f(a_4) = f(1997) = 1998$; $a_6 = f(a_5) = f(1998) = 1999$; $a_7 = f(a_6) = f(1999) = 2000$. Observamos que de a_0 a a_6 no son divisibles por 10, pero ahora que hemos encontrado que a_7 es divisible por 10, utilizaremos $f(x) = \frac{x}{10}$.

Entonces, $a_8 = f(a_7) = f(2000) = \frac{2000}{10} = 200$. Luego, $a_9 = f(a_8) = f(200) = \frac{200}{10} = 20$; $a_{10} = f(a_9) = f(20) = \frac{20}{10} = 2$. Observamos que 2 no es divisible por 10. Entonces, $a_{11} = f(a_{10}) = f(2) = 3$; $a_{12} = f(a_{11}) = f(3) = 4$; $a_{13} = f(a_{12}) = f(4) = 5$; $a_{14} = f(a_{13}) = f(5) = 6$; $a_{15} = f(a_{14}) = f(6) = 7$; $a_{16} = f(a_{15}) = f(7) = 8$; $a_{17} = f(a_{16}) = f(8) = 9$; $a_{19} = f(a_{18}) = f(9) = 10$. Hemos encontrado otro divisible por 10. Luego, $a_{20} = f(a_{19}) = f(10) = 1$. Este es el más pequeño es el subíndice $n = 20$ que cumple las condiciones.

Problema 1.45.

Hay 270 estudiantes en Centro Escolar República de El Salvador, donde la proporción de niños y niñas es de 5:4.

Hay 180 estudiantes en el Centro Escolar Centro América, donde la proporción de niños y niñas es de 4:5. Las dos escuelas tienen un baile y todos los estudiantes de ambas escuelas asisten. ¿Qué fracción de los asistentes al baile está formado por chicas?

Solución 1 del Problema 1.45.

Observemos los datos con que contamos:

Institución	estudiantes	Proporción	Niños	Niñas
C.E. República de El Salvador	270	5:4	150	120
C.E. Centro América	180	4:5	80	100

Por lo tanto el total de niñas es de 220. Entonces, las niñas son:

$niñas = \frac{220}{450} = \frac{22}{45} * 100 = 48.89\%$

Solución 2 del Problema 1.45.

Si en el Centro Escolar República de El Salvador, la proporción de niños respecto de niñas es de 5:4, entonces $\frac{5}{9}$ son niñas y $\frac{4}{9}$ son niños. De forma análoga, en el Centro Escolar Centro América, si la proporción de niños y niñas es de 4:5, entonces $\frac{4}{9}$ son niñas y $\frac{5}{9}$ son niños.

De esto deducimos que al Centro Escolar República de El Salvador asisten $\frac{5}{9}(270) = 120$ niñas. De forma análoga, en la Escuela Centro América estudian $\frac{5}{9}(180) = 100$ alumnas.

En total, las dos escuelas suman 220 niñas. La proporción total de niñas en ambas instituciones $\boldsymbol{N}$ se obtiene dividiendo la cantidad total de niñas por la cantidad total de estudiantes en ambas escuelas. Es decir: $\boldsymbol{N} = \frac{220}{270+180} = \frac{22}{45}$.

Problema 1.46.

Un pequeño mono araña se come todas las hojas de un matorral en 10 horas. Si su papá y su mamá comen ambos el doble de rápido que el pequeño. ¿Cuántas horas tardan, los tres monos juntos, en comer todas las hojas del matorral?

Solución del Problema 1.46.

La velocidad a la que el pequeño mono come los matorrales es de 1 matorral por 10 horas. La velocidad a la que los padres comen los matorrales es de 2 matorrales por 10 horas. Es decir, ellos comerían, cada uno, dos matorrales en

10 horas. Por lo tanto, los tres monos juntos comerían a una velocidad de 5 matorrales en 10 horas. Entonces, comerían un matorral en dos horas.

Problema 1.47.

La población de un municipio se incrementó en 1,200 personas. Luego, esta nueva población disminuyó en un 11%. El municipio tiene ahora 32 personas menos de las que tenía antes del aumento de 1,200. ¿Cuál fue la población original?

Solución del Problema 1.47.

Sea x la población original. Después del incremento inicial la población será de $x + 1{,}200$. Como esta nueva población disminuyó un 11%, podemos expresar la disminución como $0.11(x + 1{,}200)$. De igual manera, la población al final será de $(1-0.11)(x + 1{,}200)$. También sabemos que la población al final es equivalente a la población original disminuida en 32. Es decir $x-32$. Con base a lo anterior podemos establecer la igualdad:

$\left(1-0.11\right)\left(x + 1{,}200\right) = x-32 \Rightarrow x + 1200 - 0.11x - 132 = x - 32 \Rightarrow 1200 - 132 + 32 = x - x + 0.11x \Rightarrow 1100 = 0.11x \Rightarrow x = \frac{1100}{0.11} = x \Rightarrow x = 10000.$ Por tanto, la población original era de 10,000 personas.

Problema 1.48.

Dos naves inter-espaciales, Acajutla y Cuscatlán, parten hacia Marte con sus relojes sincronizados al momento del despegue. El reloj de Acajutla está descompuesto de modo que se atrasa 200 minutos por cada 10065. El reloj de Cuscatlán, está descompuesto de modo que este se adelanta 100 minutos por cada 10065. Al llegar a Marte las tripulaciones de las dos naves se dan cuenta que en ese momento ambos relojes marcan la misma hora. ¿Cuántos minutos tomó el viaje?

Solución del Problema 1.48.

Cada minuto, la diferencia entre los relojes de ambas naves crecerá en $\frac{200}{10065} + \frac{100}{10065}$. Los relojes volverán a estar en la misma posición cuando la diferencia entre ambos sume 60 minutos. Por lo tanto, la cantidad de minutos T en la que esto ocurrirá será: $T = \frac{60}{\left(\frac{200}{10065}+\frac{100}{10065}\right)} = \frac{60}{\frac{300}{10065}} = 2013.$

Problema 1.49.

Hay 8 monedas que se ven iguales pero sólo una es de oro sólido. La moneda de oro macizo pesa ligeramente más que las falsificaciones. Para identificar la moneda de oro real, usted puede utilizar la balanza sólo dos veces. ¿Cómo puedes averiguar cuál es la moneda real?

Solución del Problema 1.49.

Primero colocamos tres monedas en cada plato y dejamos dos fuera de la balanza. Luego de hacer esto existen dos posibilidades: (1) Que la balanza quede equilibrada o (2) que la balanza quede con un desnivel. En el primer caso, podemos estar seguros que la moneda de oro macizo no está en los platos de la balanza. Así que utilizamos la balanza por segunda vez para pesar las dos monedas que nos quedaron fuera. La que pese más es la moneda de oro.

En el segundo caso, podemos estar seguros que la moneda de oro está entre las tres monedas del plato que pesa más. Utilizamos la balanza por segunda vez para pesar dos de esas monedas. Si luego de esta segunda operación la balanza queda equilibrada, la tercera moneda es de oro. Si queda desnivelada, la moneda del plato más pesado es la moneda de oro.

Problema 1.50.

¿Cuál de los siguientes tiene que ser un número entero?

f) El promedio de dos números enteros pares.

g) El promedio de dos números primos.

h) El promedio de dos cuadrados perfectos.

i) El promedio de dos múltiplos de 4.

j) El promedio de tres enteros consecutivos.

Solución del Problema 1.50.

Examinemos las proposiciones una por una:

a) **El promedio de dos números enteros pares.** Consideremos los enteros pares $2n$ y $2k$. En estos, n y k son ambos enteros. El promedio de ambos será: $\frac{2(n+k)}{2} = n + k$ que necesariamente es un entero.

b) **El promedio de dos números primos.** Podemos probar que esta afirmación es falsa con un contraejemplo. Consideremos por ejemplo lo primos 2 y 3. Su promedio será $\frac{2+3}{2} = 2.5$. Lo que demuestra que el promedio de dos primos no es necesariamente un número entero.

c) **El promedio de dos cuadrados perfectos**. Considérese el siguiente contra ejemplo. Calculemos el promedio de $4^2 = 16$ y $13^2 = 169$. Este será: $\frac{16+169}{2} = 92.5$. Este contraejemplo es suficiente para demostrar que el promedio de dos cuadrados perfectos no es necesariamente entero.

d) **El promedio de dos múltiplos de 4.** Sean $4n$ y $4k$ dos múltiplos de 4. Si calculamos su promedio tenemos $\frac{4(n+k)}{2} = 2(n + k)$. Que es un número entero. Esto prueba que el promedio de dos múltiplos de cuatro siempre es entero.

e) **El promedio de tres enteros consecutivos**. Sea $n - 1, n\, y\, n + 1$ tres enteros consecutivos. Al calcular el promedio, tenemos: $\frac{(n-1)+n+(n+1)}{3} = \frac{3n}{3} = n$ que es por definición entero. Esto demuestra que el promedio de tres números consecutivos es necesariamente entero.

Capítulo 2

Problemas de Álgebra

A continuación se presenta una serie de problemas de álgebra o que en general se han abordado desde una perspectiva algebraica.

Enunciados de los Problemas de Álgebra

Problema 2.1.

El producto de $\sqrt{6} * \sqrt{12} * \sqrt{18} * \sqrt{24} * \sqrt{30} * \sqrt{36} * \sqrt{42}$ puede ser expresado de la forma $2^a * 3^b * 5^c * 7^d$ Determine $a+b+c+d$

Problema 2.2.

¿Cuál es el entero n más grande tal que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es un entero?

Problema 2.3.

¿Cuál es el menor entero tal que la suma de sus dígitos sea 2013 y el producto sea $2^{20}5^{13}$?

Problema 2.4.

Demostrar que al multiplicar tres enteros consecutivos y agregar el número central este siempre es un cubo perfecto.

Problema 2.5.

¿Cuál es la forma general de los números que son el producto de cuatro números consecutivos agregado en uno?

Problema 2.6.

Si x^2+5x+6 es un factor de x^4+ax^2+b entonces $a+b$ es igual a

Problema 2.7.

Los números a, b, c son diferentes de cero, y su suma es igual a cero. Encuentre el valor de la expresión $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$

Problema 2.8.

Sean a, b tal que $\mathrm{ab}=2=\mathrm{a}+\mathrm{b}$ ¿Cuál es el valor de $\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3$?

Problema 2.9.

Un número no negativo x es tal que $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$ ¿Cuál es el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$?

Problema 2.10.

Si $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=0$ y $\mathrm{abc}=1$ Determine el valor de $\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+\mathrm{c}^3$.

Problema 2.11.

Sean a,b,c números reales no nulos, demostrar que si $abc=1$, entonces

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2=4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)$$

Problema 2.12.

(a, b) Es una solución del sistema de ecuaciones $ab = 5$, $a^2b + b^2a + a + b = 42$. ¿Cuál es el valor de $a^2 + b^2$**?**

Problema 2.13.

El número primo 1999 se puede escribir como $a^2 - b^2$ donde a, b son enteros ¿Cuál es el valor de $a^2 + b^2$**?**

Problema 2.14.

Dado $x^2 + y^2 = 28$ y $xy = 14$ ¿Cuál es el valor de $x^2 - y^2$?

Problema 2.15.

Si $x^2 + xy + x = 14$ y $y^2 + xy + y = 28$ ¿Cuál es el posible valor para $x + y$**?**

Problema 2.16.

Dado los números $x + y = 1$, y $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 12$, ¿Cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

Problema 2.17.

Si $a + b = 14$, $b + c = 13$ y $a + c = 9$ Calcular abc

Problema 2.18.

Sean a, b, c números reales tales que $a - 7b + 8c = 4$ y $8a + 4b - c = 7$ Calcule el valor de $a^2 - b^2 + c^2$

Problema 2.19.

Si $a + b - c = 3$; $a - b + c = 4$ Calcular $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 5a - b + c - 3$

Problema 2.20.

Considere a, b positivos tales que $(a + b)^4 = 2\left(a^2 - b^2\right)^2$ y $a^2 + b^2 = 30$ Deducir el valor de ab

Problema 2.21.

Un número positivo x verifica la relación $\frac{1}{x^2} + x^2 = 7$ Demostrar que $\frac{1}{x^5} + x^5$ es entero y calcular su valor.

Problema 2.22.

Sabiendo que $x + y + z = 3$, $xy + xz + yz = -1$ y $xyz = -5$ Calcular $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3$

Problema 2.23.

Demuestre que $w^2 + (w+1)^2 + w^2(w+1)^2$ es un cuadrado perfecto, con w entero.

Problema 2.24.

Determinar el número de enteros positivos n, tales que $\mathrm{n}^2 + 89$ es un cuadrado.

Problema 2.25.

Encontrar los valores de x que satisfacen $(x-5)^{x^2-4} = 1$

Problema 2.26.

¿Cuántos números enteros satisfacen la ecuación $(x^2 - x - 1)^{x^2-7x+12} = 1$?

Problema 2.27.

Encuentre el valor de a si la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2 + ax - 2 = 0$ es 13

Problema 2.28.

Si x, y son números enteros positivos con $xy = 18$, $xz = 3$, $yz = 6$. ¿Cuál es el valor de x + y + z?

Problema 2.29.

Si $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{8}$ ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?

Problema 2.30.

Si a, b son números naturales $\{1,2,3\ldots\}$ con $a+b+ab=54$ Entonces, ¿cuál es el valor de $a+b$?

Problema 2.31.

Los números reales x,y,z cumplen que $x+y+z=0$ Demuestre que $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Problema 2.32.

Sea a, b, c números enteros y $a+b+c=0$ Demostrar que $a^4+b^4+c^4$ es divisible por $a^2+b^2+c^2$

Problema 2.33.

Si $\mathrm{x}+\mathrm{y}+2\mathrm{z}=\mathrm{k}$ y también $\mathrm{x}+2\mathrm{y}+\mathrm{z}=\mathrm{k}$ y además $2\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=\mathrm{k},\mathrm{k}\neq 0$; Determinar $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2$ en función de k. ¿Qué representa k en términos geométricos?

Problema 2.34.

Juanita escribió en la pizarra 5 números al azar. De estos números, la media y la mediana son 9, y la moda 11. ¿Cuáles fueron los números originalmente escritos en la pizarra?

Problema 2.35.

Tenemos 10 números, el promedio de estos es 20, removemos uno de estos números cambiando el promedio a 19 ¿Qué número fue retirado?

Problema 2.36.

Si $x<-2$ entonces a qué es igual $\left|1-|1+x|\right|$.

Problema 2.37.

¿Cuántos enteros positivos satisfacen la desigualdad

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^1\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^3\ldots\left(x-\tfrac{4025}{2}\right)^{4025}<0?$$

Problema 2.38.

Supongamos que $f(x) = ax + b$, con a, b números reales. Definimos $f_1(x) = f(x)$ y $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ para todos los enteros positivos n.

Si $f_7(x) = 128x + 381$ ¿Cuál es el valor de $a + b$?

Problema 2.39.

Dada la función $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$, deducir $f(x^2 - 1)$

Problema 2.40.

Para todo real x, la función f(x) satisface $2f(x) + f(1 - x) = x^2$ para todo valor real de x. Calcular f(5).

Problema 2.41.

Sea f una función cuyo dominio son todos los reales: $f(x) + 2f\left(\frac{x+2013}{x-1}\right) = 4028 - x$. Calcular el valor de $f(2015)$, si $x \neq 1$

Problema 2.42.

Encuentre el valor de $f_{100}(3)$, si $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ Y $f_{n+1}(x) = f_0\big(f_n(x)\big)$.

Problema 2.43.

Calcular $f(2013)$ si $f\left(3x + \frac{1}{3x}\right) = 9x^2 + (9x^2)^{-1}$

Problema 2.44.

Hallar $f(2013)$ si $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy + 2013$ y $f(x) = f(-x)$.

Problema 2.45.

La sucesión $\{u_n\}$ definida sobre los números naturales $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2u_n$ y sea $V_n = u_{n+1} - u_n$ Mostrar que v_n es una sucesión geométrica.

Problema 2.46.

Los cinco primeros términos de una progresión aritmética son $8, a, b, c, 3a$. Calcular el séptimo término de la progresión.

Problema 2.47.

Si $y-1, 2y+2, 7y+1$ son los tres primeros términos de una sucesión geométrica de números enteros, determine el valor de y.

Problema 2.48.

Sea n un entero tal que $Log_2^3 * Log_3^4 * Log_4^5 \dots Log_n^{n+1} = 2005$. ¿Es n par o impar?

Problema 2.49.

Dado $log_9 20 = a$ y $log_3 n = 4a$ ¿Cuál es el valor de n?

Problema 2.50.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} Log_{10}x^3 + Log_{10}y^2 = 11 \\ Log_{10}x^2 - Log_{10}y^3 = 3 \end{cases}$

Ubicación Curricular de los Problemas de Álgebra

A continuación relacionamos los enunciados de problemas presentados en el capítulo anterior con los contenidos establecidos por el programa de estudios oficial de la República de el Salvador y los pre-saberes deseables para la resolución de cada problema.

Se indican también, a manera de ayuda en la resolución de los anteriores problemas, estrategias recomendadas para resolver cada problema. Una descripción de estas estrategias puede encontrarse al inicio del libro. En el capítulo siguiente se presentan soluciones a estos mismos problemas.

Problemas para el Programa de Tercer Ciclo.

Grado	Temas	Problemas	Pre-saberes	Estrategia
7°	**Unidad 9: Conozcamos y apliquemos los radicales.** Raíz cuadrada y cúbica exacta. Propiedades de los radicales, radicales semejantes y operaciones.	2.1, 2.3.	Potencias, propiedades Operaciones y simplificación de radicales.	Descomposición del problema
8°	**Unidad 4: Aprendamos a factorizar.** Factor común, trinomios factorizables, suma o diferencia de potencias iguales, combinación de casos.	2.2.	Factorización, divisores primos.	Manipulación algebraica
		2.4, 2.5, 2.6.	Lenguaje Algebraico, Operaciones con polinomios.	Modelar matemáticamente
		2.8, 2.9, 2.10, 2.11.	Factorización, Valor numérico.	Descomposición del problema, Manipulación algebraica
8°	**Unidad 6: Operemos fracciones algebraicas.** Cálculo y aplicación del mínimo común múltiplo y máximo común divisor de	2.7.	Operaciones básicas con polinomios.	Manipulación algebraica, Descomposición del problema

Grado	Temas	Problemas	Pre-saberes	Estrategia
	monomios y polinomios y la simplificación de fracciones.			
9°	**Unidad 2: Resolvamos sistemas de dos ecuaciones lineales.** Ecuación de una Recta, sistema de ecuaciones.	2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.24.	Factorización, Valor numérico, Ecuaciones de primer grado.	Descomposición del problema
9°	**Unidad 5:** Resolvamos ecuaciones de segundo grado. Métodos de solución.	2.25, 2.26, 2.27.	Factorización, Potenciación	Descomposición del problema
9°	**Unidad 7:** Resolvamos sistemas de ecuaciones. Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, métodos de solución.	2.20, 2.21, 2.22, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33.	Factorización, Valor numérico, Sistemas de ecuaciones.	Descomposición del problema
9°	**Unidad 8:** Utilicemos potencias algebraicas. Potenciación algebraica: Binomio de Newton, Triángulo de Pascal y término general.	2.23.	Factorización.	

Problemas Para el Programa de Educación Media.

Grado	Temas	Problema	Pre-saberes	Estrategia
1°	**Unidad 5: Utilicemos medidas de tendencia central.** Media, mediana y moda.	2.34, 2.35.	Ecuaciones de primer grado, Ecuaciones de segundo grado.	Descomposición del problema
1°	**Unidad 7: Resolvamos desigualdades.** Intervalos y desigualdades.	2.36, 2.37.	Operaciones con polinomios, Factorización.	Descomposición del problema.
1°	**Unidad 9: Utilicemos las funciones algebraicas.** Funciones: algebraicas, polinomiales, racionales, raíz cuadrada, de proporcionalidad directa e inversa; y sus métodos. Función inversa.	2.38, 2.39, 2.49, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44.	Operaciones básicas con números reales, Factorización, Ecuaciones de primero y segundo grado, Sistemas de ecuaciones.	Descomposición del problema, Patrones.
2°	**Unidad 1: Estudiemos sucesiones aritméticas y geométricas.** Características, términos.	2.45, 2.46, 2.47.	Sistemas de ecuaciones lineales, Ecuaciones de segundo grado.	Descomposición del problema.
2°	**Unidad 3: Analicemos la función exponencial y logarítmica.** Características. Dominio, rango o recorrido, gráficas.	2.48, 2.49, 2.50.	Potenciación, Sistemas de ecuaciones, Propiedades de logaritmos.	Descomposición del problema.

Soluciones de los Problemas de Álgebra

Problema 2.1.

El producto de $\sqrt{6} * \sqrt{12} * \sqrt{18} * \sqrt{24} * \sqrt{30} * \sqrt{36} * \sqrt{42}$ puede ser expresado de la forma $2^a * 3^b * 5^c * 7^d$. Determine $a + b + c + d$.

Solución del Problema 2.1.

Podemos descomponer 6, 12, 18, 24, 30, 36 y 42 de la siguiente manera: $2 * 3 = 6$, $2^2 * 3 = 12$, $3^2 * 2 = 18$, $2^3 * 3 = 24$, $2 * 3 * 5 = 30$, $2^2 * 3^2 = 36$, $3 * 2 * 7 = 42$. Entonces podemos expresar $\sqrt{6} * \sqrt{12} * \sqrt{18} * \sqrt{24} * \sqrt{30} * \sqrt{36} * \sqrt{42} = 2^a * 3^b * 5^c * 7^d$. Desarrollando el primer término de esta igualdad escribimos: $\sqrt{6} * \sqrt{12} * \sqrt{18} * \sqrt{24} * \sqrt{30} * \sqrt{36} * \sqrt{42} = \sqrt{2 * 3} * \sqrt{2^2 * 3} * \sqrt{3^2 * 2} * \sqrt{2^3 * 3} * \sqrt{2 * 3 * 5} * \sqrt{2^2 * 3^2} * \sqrt{3 * 2 * 7} = \sqrt{2^{11} * 3^9 * 5 * 7} = \sqrt{2^{11}} * \sqrt{3^9} * \sqrt{5} * \sqrt{7} = 2^{\frac{11}{2}} * 3^{\frac{9}{2}} * 5^{\frac{1}{2}} * 7^{\frac{1}{2}}$. Por las condiciones iniciales tenemos: $2^{\frac{11}{2}} * 3^{\frac{9}{2}} * 5^{\frac{1}{2}} * 7^{\frac{1}{2}} = 2^a * 3^b * 5^c * 7^d$.

Entonces, $a + b + c + d = \frac{11}{2} + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{22}{2} = 11$.

Problema 2.2.

¿Cuál es el entero n más grande tal que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es un entero?

Solución del Problema 2.2.

Escribiremos la expresión como: $\frac{n^2-38}{n+1} = \frac{n^2-1-37}{n+1} \Longrightarrow \frac{n^2-38}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} - \frac{37}{n+1} \Longrightarrow \frac{n^2-38}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} - \frac{37}{n+1} \Longrightarrow \frac{n^2-38}{n+1} = (n-1) - \frac{37}{n+1}$. Puesto que n es entero, sabemos que $n - 1$ es entero. Por lo tanto, $\frac{37}{n+1}$ tiene que ser entero para que toda la expresión original sea entera. Esto será posible únicamente cuando $n + 1$ sea divisor de 37. Puesto que 37 es primo, los posibles valores para este denominador son: 1, -1 y 37 y -37. El valor que necesita tener n para que el denominador adquiera estos valores son 0, -2, 36 y -38 respectivamente.

Problema 2.3.

¿Cuál es el menor entero tal que la suma de sus dígitos sea 2,013 y el producto sea $2^{20}5^{13}$?

Solución 1 del Problema 2.3.

Observemos que los únicos dígitos posibles son 1, 2, 4, 5, 8. Esto, porque son todos los dígitos que son potencias de 2 o 5. Además, no existe ningún dígito que sea múltiplo de ambos. Por lo tanto, tendremos que la suma de los dígitos del número que buscamos se puede escribir como $2013 = 1a + 2b + 4c + 5d + 8e$ donde a es la cantidad de veces que aparece el dígito 1; b la cantidad de veces que aparece el dígito 2; c la cantidad de veces que aparece el dígito 4; d la cantidad de veces que aparece el dígito 5; e la cantidad de veces que aparece el dígito 8.

Además, dada la expresión del producto de los dígitos, escribimos también $2^{20}5^{13} = 1^a * 2^b * 4^c * 5^d * 8^e$. De esto se deduce que la única forma para lograr el producto 5^{13} es que hallan 13 dígitos 5. Por lo tanto $d = 13$. Sustituyendo el valor para d en la expresión que armamos para la suma tenemos: $2013 = 1a + 2b + 4c + 5(13) + 8e \Longrightarrow 1948 = 1a + 2b + 4c + 8e$. Debido a que buscamos el menor número, buscaremos que haya el mayor número posible de los dígitos más grandes. Observemos que $8 * 243 = 1{,}944$, que nos da un resultado tal que ya no podemos sumarle 8 más sin que el resultado sea mayor que 1948.

Así, definamos $e = 243$. Para completar la suma de 1948, sólo necesitamos sumar 4. Por lo tanto, tendremos que: $2013 = 1(0) + 2(0) + 4(1) + 5(13) + 8(243)$. Con base a este planteamiento el número que buscamos tendrá 13 dígitos 5, 243 dígitos 8 y un dígito 4. Dado que queremos formar el menor número posible, buscaremos colocar los dígitos de menor valor en las cifras más significativas, de modo que el número nos quedará así: $4\underbrace{555\ldots555}_{13}\underbrace{88888\ldots88888}_{243}$

Solución 2 del Problema 2.3.

Observemos que el único dígito, diferente de uno, que es potencia de 5 es el mismo 5. Por lo tanto, si el producto es divisible por 5^{13} entonces, el dígito 5 debe aparecer 13 veces en el número. Esto quiere decir que la suma de los demás dígitos será $2013 - 5 * 13 = 2013 - 65 = 1948$. Esta será la suma de los dígitos que sean potencia de 2. Las únicas potencias de 2 admisibles son1, 2, 4, y 8. Debido a que buscamos el menor número, buscaremos que haya el mayor número posible de los dígitos más grandes.

Así, para formar 1948, veremos $8 * 243 = 1944$ y ya no podemos incluir otro 8 más en la suma. El 4 restante lo completamos con un dígito 4. De todo esto deducimos que el número que buscamos tendrá 13 dígitos 5, 243 dígitos 8 y un dígito 4. Puesto que queremos formar el menor número posible, buscaremos colocar los dígitos de menor valor en las cifras más significativas, de modo que el número nos quedará así: $4\underbrace{555\ldots555}_{13}\underbrace{88888\ldots88888}_{243}$.

Problema 2.4.

Demostrar que al multiplicar tres enteros consecutivos y agregar el número central, éste siempre es un cubo perfecto.

Solución del Problema 2.4.

Consideremos los tres números enteros consecutivos $x-1$, x, $x+1$. Al expresar S como el producto de estos tres aumentado en el central tendremos: $S = (x-1)(x)(x+1) + x = x(x^2-1) + x = (x^3 - x) + x = x^3$.

Por lo tanto, al multiplicar tres números enteros consecutivos y agregar el número central, este siempre será un cubo perfecto.

Problema 2.5.

¿Cuál es la forma general de los números que son el producto de cuatro números consecutivos agregado en uno?

Solución 1 del Problema 2.5.

Calculemos algunos casos particulares: $(1)(2)(3)(4)+1 = 25 = 5^2$; $(2)(3)(4)(5) + 1 = 121 = 11^2$; $(3)(4)(5)(6)+1 = 361 = 19^2$; $(4)(5)(6)(7)+1 = 841 = 29^2$; $(5)(6)(7)(8)+1 = 1681 = 41^2$.

Analicemos los casos particulares detenidamente: $(1)(2)(3)(4)+1 = 25 = 5^2 = (1+4)^2 = \left(1+2^2\right)^2$; $(2)(3)(4)(5)+1 = 121 = 11^2 = (2+9)^2 = \left(2+3^2\right)^2$; $(3)(4)(5)(6)+1 = 361 = 19^2 = (3+16)^2 = \left(3+4^2\right)^2$.

El resultado es el cuadrado de la suma del primer número con el cuadrado del segundo número consecutivo. En base a estos resultados podemos conjeturar:

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = [x+(x+1)^2]^2.$

Solución 2 del Problema 2.5.

Multipliquemos cuatro números consecutivos: $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+x)(x^2+5x+6)+1 = x^4+5x^3+6x^2+x^3+5x^2+6x+1 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1 = x^4+9x^2+1+6x^3+2x^2+6x = (x^2)^2+1+2(x^2)(3x)+2(x^2)(1)+2(3x)(1)+(3x)^2 = (x^2+x+2x+1)^2 = [x+(x^2+2x+1)]^2 = [x+(x+1)^2]^2$

Problema 2.6.

Si x^2+5x+6 es un factor de x^4+ax^2+b, entonces $a+b$ es igual a:

Solución del Problema 2.6.

Si x^2+5x+6 divide al polinomio x^4+ax^2+b, entonces debe existir otro polinomio x^2+cx+d tal que $(x^2+5x+6)(x^2+cx+d) = x^4+ax^2+b$ Realizando el producto indicado obtenemos $(x^2+5x+6)(x^2+cx+d) = x^4+(5+c)x^3+(5c+d+6)x^2+(5d+6c)x+6d.$

Combinando los resultados anteriores escribimos: $x^4+(5+c)x^3+(5c+d+6)x^2+(5d+6c)x+6d = x^4+ax^2+b = x^4+0x^3+ax^2+0x+b.$

Observemos que los coeficientes para cada potencia de x, deben ser los mismos en ambas expresiones.

Por lo tanto, para los coeficientes de x^3 y x^1 tendremos: $5+c=0 \Longrightarrow c=-5$; $5d+6c=0 \Longrightarrow 5d+6(-5)=0 \Longrightarrow 5d=30 \Longrightarrow d=6.$

Para el coeficiente de x^2 tenemos: $5c+d+6=a \Longrightarrow a=5(-5)+6+6 \Longrightarrow a=-13$. Para el coeficiente de x^0, también llamada constante independiente, tenemos: $b=6d \Longrightarrow 6(6)=36.$

Ahora que tenemos los valores para a y b, podemos concluir: $a+b=-13+36=23.$

Problema 2.7.

Los números a, b, c son diferentes de cero, y su suma es igual a cero.

Encuentre el valor de la expresión $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$

Solución 1 del Problema 2.7.

En la expresión sumemos y restemos a esta $\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}$ de modo que el valor de la expresión no cambie: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{a}-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}-\frac{a}{a}$. Pero $-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}-\frac{a}{a}=-1-1-1=-3\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{a}-3\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}-3$. Sabemos que $a+b+c=0$. Por lo tanto, $\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}-3=-3\Longrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=-3$.

Solución 2 del Problema 2.7.

Observemos las siguientes tres expresiones: $a+b+c=0\Rightarrow\frac{a+b+c}{a}=0\Rightarrow 1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=0\Rightarrow\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=-1$; $a+b+c=0\Rightarrow\frac{a+b+c}{b}=0\Rightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=0\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=-1$; $a+b+c=0\Rightarrow\frac{a+b+c}{c}=0\Rightarrow 1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=0\Rightarrow\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=-1$. Sumando las expresiones anteriormente obtenidas escribimos: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=-3$.

Solución 3 del Problema 2.7.

Operemos de la siguiente forma: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a}=\frac{a+c+b-b}{b}+\frac{b+a+c-c}{c}+\frac{c+b+a-a}{a}$. Recordemos que $a+b+c=0$, entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}=-1-1-1=-3$.

Problema 2.8.

Sean a, b tal que $\mathrm{ab}=2=\mathrm{a}+\mathrm{b}$ ¿Cuál es el valor de $\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3$?

Solución del Problema 2.8.

Observemos que: $\mathrm{a}+\mathrm{b}=2\Longrightarrow(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3=2^3\Longrightarrow\mathrm{a}^3+3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2+\mathrm{b}^3=8\Longrightarrow\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+\left(3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2\right)=8\Longrightarrow\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+3\mathrm{ab}(\mathrm{a}+\mathrm{b})=8$. Por las condiciones iniciales sabemos que $\mathrm{ab}=2$ y $\mathrm{a}+\mathrm{b}=2$. Por lo tanto, $\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+3(2)(2)=8\Longrightarrow\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+12=8\Longrightarrow\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3=8-12\Longrightarrow\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3=-4$

Problema 2.9.

Un número no negativo x es tal que $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$ ¿Cuál es el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$?

Solución del Problema 2.9.

Nótese que podemos sumar y restar -2 a la expresión para formar el trinomio cuadrado perfecto $x^2+\frac{1}{x^2}+2$ de la siguiente forma:

$$x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4 \Longrightarrow \underbrace{x^2+2+\frac{1}{x^2}}_{\substack{Trinomio\\ Cuadrado\\ Perfecto}}-2+x+\frac{1}{x}=4$$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto que completamos anteriormente tenemos: $x^2+\frac{1}{x^2}+2-2+x+\frac{1}{x}=4 \Longrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+x+\frac{1}{x}-6=0$. Que se puede a su vez descomponer en factores como $\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)=0$.

Esto puede ser cierto únicamente cuando uno de los dos factores sea igual a cero. Podemos descontar la posibilidad de que el primer factor sea cero, porque esto resultaría en una solución negativa para x y únicamente consideraremos x positivas.

Ahora consideremos la posibilidad de que el segundo factor sea igual a cero: $x+\frac{1}{x}-2=0 \Longrightarrow x+\frac{1}{x}=2$.

Que efectivamente corresponde a un valor positivo de x.

Ahora calculemos el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$. Para esto utilizaremos repetidamente la estrategia de completar el trinomio cuadrado perfecto: $x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+2+\frac{1}{x^4}-2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-2\right)^2-2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-2$.

Anteriormente obtuvimos que $x+\frac{1}{x}=2$.

Substituyamos este valor en la expresión obtenida: $\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-2=((2)^2-2)^2-2=2$. Por lo tanto, $x^4+\frac{1}{x^4}=2$.

Problema 2.10.

Si $a+b+c=0$ y $abc=1$ Determinar el valor de $a^3+b^3+c^3$

Solución del Problema 2.10.

Desarrollando $(a+b+c)^3$ tenemos: $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + \left(3a^2b + 3a^2c\right) + \left(3ab^2 + 3b^2c\right) + \left(3ac^2 + 3bc^2\right) + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc$.
Dado que, $a+b+c=0 \Longrightarrow (a+b+c)^3 = 0^3 \Longrightarrow (a+b+c)^3 = 0$.

Entonces, $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc = 0$. De la condición inicial $a+b+c=0$ se obtiene que: $b+c=-a$, $a+c=-b$, $a+b=-c$. Además, sabemos que $abc=1$.

Sustituyendo estas expresiones en la que teníamos anteriormente obtenemos: $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(-a) + 3b^2(-b) + 3c^2(-c) + 6(1) = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3a^3 - 3b^3 - 3c^3 = -6 \Rightarrow -2a^3 - 2b^3 - 2c^3 = -6 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

Problema 2.11.

Sean a, b, c números reales no nulos, demostrar que si $abc = 1$, entonces:

$$\left(a+\tfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\tfrac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\tfrac{1}{c}\right)^2 = 4 + \left(a+\tfrac{1}{a}\right)\left(b+\tfrac{1}{b}\right)\left(c+\tfrac{1}{c}\right)$$

Solución del Problema 2.11.

Desarrollaremos el segundo término de la ecuación de la forma siguiente: $4 + \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = 4 + abc + \frac{1}{abc} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$. Sabemos que $abc = 1$ De este hecho deducimos que: $a = \frac{1}{bc}$, $b = \frac{1}{ac}$, $c = \frac{1}{ab}$, $bc = \frac{1}{a}$, $ac = \frac{1}{b}$, $ab = \frac{1}{c}$. Ahora sustituiremos estas razones en la expresión que teníamos anteriormente. De ahí obtenemos $4 + abc + \frac{1}{abc} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = 4 + 1 + 1 + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2$, demostrando que la conjetura propuesta es cierta.

Problema 2.12.

(a, b) Es una solución del sistema de ecuaciones $ab = 5$, $a^2b + b^2a + a + b = 42$. ¿Cuál es el valor de $a^2 + b^2$?

Solución del Problema 2.12.

$a^2b + b^2a + a + b = 42 \Rightarrow \left(a^2b + b^2a\right) + (a+b) = 42 \Longrightarrow ab(a+b) + (a+b) = 42 \Longrightarrow (a+b)(ab+1) = 42$. Puesto que por las condiciones iniciales $ab = 5$ tenemos:

$(a+b)(ab+1)=42 \Longrightarrow (a+b)(5+1)=42 \Longrightarrow 6(a+b)=42 \Longrightarrow a+b=7$.
Elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos: $(a+b)^2=7^2 \Longrightarrow a^2+2ab+b^2=49 \Rightarrow a^2+b^2=49-2ab \Longrightarrow a^2+b^2=49-2(5) \Longrightarrow a^2+b^2=39$.

Problema 2.13.

El número primo 1999 se puede escribir como a^2-b^2 donde a,b son enteros. ¿Cuál es el valor de a^2+b^2?

Solución del Problema 2.13.

Tenemos que: $a^2-b^2=1999 \Longrightarrow (a+b)(a-b)=1999$. Puesto que 1999 es primo, sabemos que uno de los factores es 1999 y el otro 1. De aquí que podemos descomponer el problema en dos casos. El primero, haciendo $(a+b)=1999$ y $(a-b)=1$ tenemos $(a+b)=1999 \Longrightarrow a=1999-b$; $(a-b)=1 \Longrightarrow a=1+b$. Igualando estas expresiones obtenemos $1999-b=1+b \Longrightarrow 1998=2b \Longrightarrow \frac{1998}{2}=b \Longrightarrow b=999$. Luego, $a=1999-b=1999-999=1000$. De aquí obtenemos uno de los valores para $a^2+b^2=1000^2+999^2=1{,}998{,}001$.

Ahora consideremos el segundo caso: $(a+b)=1 \Longrightarrow a=1-b$; $(a-b)=1999 \Longrightarrow a=1999+b$. Al igualar estas ecuaciones tenemos $1-b=1999+b \Longrightarrow 2b=1-1999 \Longrightarrow 2b=-1998 \Rightarrow b=-999$. De aquí obtenemos: $a=1-b=1-(-999)=1000$. Entonces, $a^2+b^2=1{,}998{,}001$.

Problema 2.14.

Dado x^2+y^2=28 y $xy=14$ ¿Cuál es el valor de x^2-y^2?

Solución del Problema 2.14.

Sumando $2xy$ a ambos lados de la primera expresión tenemos: $x^2+2xy+y^2=28+2xy \Rightarrow (x+y)^2=28+2xy$. Conocemos que $xy=14$ entonces $2xy=28$ Sustituyendo este valor en la expresión anterior tenemos: $(x+y)^2=28+28 \Longrightarrow (x+y)^2=56 \Longrightarrow x+y=\sqrt{56}$.

Ahora vamos a restar $2xy$ a ambos lados de la igualdad $x^2+y^2=28 \Longrightarrow x^2-2xy+y^2=28-2xy$. Sustituyendo $-2xy=-28$ en la expresión anterior, tenemos:$x^2-2xy+y^2=28-28 \Longrightarrow (x-y)^2=0 \Longrightarrow x-y=0$. De los desarrollos anteriores obtuvimos que $x+y=\sqrt{56}$; $x-y=0$. De estas dos expresiones obtenemos: $(x+y)(x-y)=\left(\sqrt{56}\right)(0) \Longrightarrow x^2-y^2=0$.

Problema 2.15.

Si $x^2 + xy + x = 14$ y $y^2 + xy + y = 28$, ¿Cuál es el posible valor para $x + y$?

Solución del Problema 2.15.

Consideremos las expresiones $x^2 + xy + x = 14$; $y^2 + xy + y = 28$. Obteniendo la diferencia entre estas obtenemos: $x^2 + xy + x - y^2 - xy - y = 14 - 28 \Longrightarrow x^2 + x - y^2 - y = -14 \Longrightarrow (x^2 - y^2) + (x - y) = -14 \Longrightarrow (x + y)(x - y) + (x - y) = -14 \Longrightarrow (x - y)(x + y + 1) = -14$.

Ahora consideremos la suma de las expresiones: $(x^2 + xy + x) + (y^2 + xy + y) = 14 + 28 \Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 42$. Al operar y factorizar llegaremos a lo siguiente: $(x^2 + 2xy + y^2) + (x + y) = 42 \Longrightarrow (x + y)^2 + (x + y) = 42 \Longrightarrow (x + y)(x + y + 1) = 42$.

Ahora dividiremos las dos expresiones obtenidas de la resta y la suma anteriores: $\frac{(x+y)(x+y+1)}{(x-y)(x+y+1)} = \frac{42}{-14} \Longrightarrow \frac{x+y}{x-y} = -3 \Longrightarrow x + y = -3x + 3y \Longrightarrow 4x - 2y = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0 \Longrightarrow y = 2x$. Ahora sustituiremos $y = 2x$ en la ecuación (3): $(x - y)(x + y + 1) = -14 \Longrightarrow (x - 2x)(x + 2x + 1) = -14 \Longrightarrow -x(3x + 1) = -14 \Longrightarrow -3x^2 - x + 14 = 0 \Longrightarrow 3x^2 + x - 14 = 0 \Longrightarrow (3x + 7)(x - 2) = 0$. Entonces tendremos dos soluciones posibles cuando cada uno de los factores sea cero. $3x + 7 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{7}{3}$. También $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Para $x = -\frac{7}{3}$, tenemos: $y = 2x = 2\left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{3}$.

Por lo tanto, en este caso el valor de $x + y$ es -7. Para $x = 2$, tenemos: $y = 2(2) = 4$. Por lo tanto, en este caso el valor de $x + y$ es 6.

Problema 2.16.

Dado los números $x + y = 1$, y $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 12$, ¿Cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

Solución del Problema 2.16.

Sabemos que $x + y = 1$, elevando al cuadrado ambos lados tenemos $(x + y)^2 = 1^2 \Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

De la ecuación anterior despejamos $x^2 + y^2$ así obtenemos $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Ahora factorizaremos los cubos: $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 12 \Longrightarrow (x^2 + y^2)(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 12$. Sabemos que $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$.

Sustituyendo en la ecuación obtenida despejando cubos obtenemos que: $(x^2+y^2)(x+y)(x^2+y^2-xy)=12 \Longrightarrow (1-2xy)(1)(1-2xy-xy)=12 \Longrightarrow$ $(1-2xy)(1-3xy)=12 \Longrightarrow 1-3xy-2xy+6x^2y^2=12 \Longrightarrow\ 6x^2y^2-5xy-11=0.$ Factorizando obtenemos $(6xy-11)(xy+1)=0.$

Esta ecuación tendrá soluciones cuando uno de los dos factores sea cero. Por tanto: $6xy-11=0 \Longrightarrow xy=\frac{11}{6}$ y también $xy+1=0 \Longrightarrow xy=-1$. Con este resultado podemos obtener x^2+y^2.

Podemos utilizar estos valores en la expresión $x^2+y^2=1-2xy$, que obtuvimos anteriormente, para obtener valores para x^2+y^2. Sustituyendo tenemos: $x^2+y^2=1-2xy \Longrightarrow x^2+y^2=1-2\left(\frac{11}{6}\right)=1-\frac{11}{3}=-\frac{8}{3} \Longrightarrow x^2+y^2=-\frac{8}{3}$; También obtenemos $x^2+y^2=1-2xy \Longrightarrow x^2+y^2=1-2(-1)=1+2=3 \Longrightarrow x^2+y^2=3.$ Por lo tanto, hay dos posibles valores para x^2+y^2. Estos son: $-\frac{8}{3}$ y 3.

Problema 2.17.

Si $a+b=14$, $b+c=13$ y $a+c=9$ Calcular abc.

Solución del Problema 2.17.

De las expresiones provistas, obtengamos expresiones para a, b y c: $\mathrm{a+b}=14 \Longrightarrow \mathrm{a}=14-\mathrm{b}$; $\mathrm{b+c}=13 \Longrightarrow \mathrm{b}=13-\mathrm{c}$; $\mathrm{a+c}=9 \Longrightarrow \mathrm{c}=9-\mathrm{a}$. Utilizando las expresiones así obtenidas, sustituyamos para simplificarlas: $\mathrm{a}=14-\mathrm{b}=14-(13-\mathrm{c})=1+\mathrm{c}$; $\mathrm{a}=1+\mathrm{c}=1+(9-\mathrm{a})=10-\mathrm{a} \Longrightarrow\ 2\mathrm{a}=10 \Longrightarrow\ \mathrm{a}=5$. Ahora que tenemos un valor para a, podemos sustituirlo en las expresiones anteriormente obtenidas para obtener así valores para b y c: $\mathrm{c}=9-\mathrm{a}=9-5=4$; $\mathrm{b}=13-\mathrm{c}=13-4=9$; Por lo tanto, $\mathrm{abc}=5*4*9=180$.

Problema 2.18.

Sean a, b, c números reales tales que $a-7b+8c=4$ y $8a+4b-c=7$ Calcule el valor de $a^2-b^2+c^2$.

Solución del Problema 2.18.

Despejemos las dos ecuaciones dadas de la siguiente forma: $\mathrm{a}-7\mathrm{b}+8\mathrm{c}=4 \Longrightarrow$ $\mathrm{a}=4+7\mathrm{b}-8\mathrm{c}$

$8a + 4b - c = 7 \Longrightarrow a = \frac{7-4b+c}{8}$. Ahora igualamos ambos resultamos: $4 + 7b - 8c = \frac{7-4b+c}{8} \Longrightarrow 32 + 56b - 64c = 7 - 4b + c \Rightarrow 60b = 65c - 25 \Rightarrow 2b = 13c - 5 \Rightarrow b = \frac{13c-5}{12}$. Como $a = 4 + 7b - 8c$, sustituyendo el valor de c y b en la ecuación obtenida anteriormente tenemos: $a = 4 + 7\left(\frac{13c-5}{12}\right) - 8c \Longrightarrow a = 4 + \frac{91c-35}{12} - 8c \Longrightarrow a = \frac{48+91c-35-96c}{12} \Longrightarrow a = \frac{13-5c}{12}$. Ahora sustituyamos las expresiones que obtuvimos en $a^2 - b^2 + c^2$. Así tenemos: $a^2 - b^2 + c^2 = \left(\frac{13-5c}{12}\right)^2 - \left(\frac{13c-5}{12}\right)^2 + c^2 = \frac{169-130k+25k^2}{144} - \frac{169k^2-130k+25}{144} + k^2 = \frac{169-130k+25k^2-169k^2+130k-25}{144} + k^2 = \frac{144-144k^2}{144} + k^2 = 1 - k^2 + k^2 \Rightarrow$
$a^2 - b^2 + c^2 = 1$.

Problema 2.19.

Si $a + b - c = 3$; $a - b + c = 4$ Calcular $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 5a - b + c - 3$

Solución del Problema 2.19.

Notemos que: $(a + b - c)(a - b + c) = 12 \Rightarrow a^2 - b^2 + bc + bc - c^2 - ab + ac + ab - ac = 12 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 12$. Sustituyamos este valor en la expresión que tratamos de calcular: $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 5a - b - 3 = 12 + 5a - b + c - 3 = 5a - b + c + 9$. Observemos ahora las dos propiedades dadas en las condiciones iniciales: $a + b - c = 3$; $a - b + c = 4$. Si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos: $(a + b - c) + (a - b + c) = 3 + 4 \Longrightarrow a = \frac{7}{2}$. Si restamos las ecuaciones obtenemos: $(a - b + c) - (a + b - c) = 4 - 3 \Longrightarrow -b + c = \frac{1}{2}$. Entonces, $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 5a - b - 3 = 9 + 5a - b + c = 9 + 5a + (-b + c) \Longrightarrow a^2 - b^2 - c^2 + 2bc +$
$5a - b - 3 = 9 + 5\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 9 + 18 = 27$.

Problema 2.20.

Considere a, b positivos tales que $(a + b)^4 = 2\left(a^2 - b^2\right)^2$ y $a^2 + b^2 = 30$ Deducir el valor de ab.

Solución del Problema 2.20.

Notemos que para los términos de la ecuación: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $2\left(a^2 - b^2\right)^2 = 2\left(a^4 - 2a^2b^2 + b^4\right)$. De donde $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 2\left(a^4 - 2a^2b^2 + b^4\right)$. Luego, $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 2a^4 + 4a^2b^2 - 2b^4 = 0 \Longrightarrow 4a^3b + 10a^2b^2 + 4ab^3 - a^4 - b^4 = 0$.

Sumando y restando $2a^2b^2$ en el primer término obtenemos: $4a^3b + 12a^2b^2 + 4ab^3 - a^4 - b^4 - 2a^2b^2 = 0 \Longrightarrow 4a^3b + 12a^2b^2 + 4ab^3 - (a^2 + b^2)^2 = 0 \Longrightarrow 4a^3b + 12a^2b^2 + 4ab^3 = (a^2 + b^2)^2$. Con base a las condiciones iniciales sabemos que $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 30}$ Por lo tanto: $4a^3b + 12a^2b^2 + 4ab^3 = 30^2 \Rightarrow 4a^3b + 12a^2b^2 + 4ab^3 = 900 \Rightarrow 4ab(a^2 + 3ab + b^2) = 900 \Longrightarrow 4ab(a^2 + 3ab + b^2) = 4ab(30 + 3ab) = 900 \Rightarrow 12ab(10 + ab) = 900 \Rightarrow ab(10 + ab) = 75 \Rightarrow (ab)^2 + 10ab - 75 = 0 \Longrightarrow (ab + 15)(ab - 5) = 0 \Rightarrow ab = -15$ o $ab = 5$. Sin embargo, estamos buscando un valor positivo. Por lo tanto, $ab = 5$.

Problema 2.21.

Un número positivo x verifica la relación $\frac{1}{x^2} + x^2 = 7$. Demostrar que $\frac{1}{x^5} + x^5$ es entero y calcular su valor.

Solución del Problema 2.21.

Operando la segunda expresión tenemos: $\frac{1}{x^5} + x^5 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 x + \left(\frac{1}{x}\right)^2 x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^1 x^3 + x^4\right) \Longrightarrow \frac{1}{x^5} + x^5 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + 1 - x^2 + x^4\right) \Longrightarrow \frac{1}{x^5} + x^5 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^4} + x^4 - \frac{1}{x^2} - x^2 + 1\right)$. Pero notemos que $\frac{1}{x^2} + x^2 = 7 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + 2 + x^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = 3$. Además, $\frac{1}{x^4} + x^4 = \frac{1}{x^4} + 2 + x^4 - 2 = \left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$. De lo anterior se deduce que $\frac{1}{x^5} + x^5 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^4} + x^4 - \frac{1}{x^2} - x^2 + 1\right) = 3(47 - 7 + 1) = 3(41) \Longrightarrow \frac{1}{x^5} + x^5 = 123$ que es un entero.

Problema 2.22.

Sabiendo que $x + y + z = 3$, $xy + xz + yz = -1$ y $xyz = -5$, Calcular $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3$

Solución del Problema 2.22.

La expresión que buscamos la podemos expresar de la siguiente forma: $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 = x^2y^2y + x^2z^2z + y^2x^2x + y^2z^2z + z^2x^2x + z^2y^2y = x^2y^2(y + x) + x^2z^2(z + x) + y^2z^2(z + y) = x^2y^2(y + x + z - z) + x^2z^2(z + x + y - y) + y^2z^2(z + y + x - x)$. De las condiciones iniciales tenemos que $x + y + z = 3$. Por lo tanto, la expresión anterior es igual a: $x^2y^2(3 - z) + x^2z^2(3 - y) + y^2z^2(3 - x) = 3x^2y^2 - x^2y^2z + 3x^2z^2 - x^2z^2y + 3y^2z^2 - y^2z^2x = 3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 - y^2z^2x - x^2y^2z - x^2z^2y = 3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 - yzyzx - xyxyz - xzxzy$. De las condiciones iniciales sabemos que $xyz = -5$. Por lo tanto, la expresión anterior es igual a: $3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 + 5yz + 5xy + 5xz = 3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 + 5(yz + xy + xz)$. En la expresión anterior podemos sustituir $xy + xz + yz = -1$. De modo que resulta en: $3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 + 5(-1) = 3x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 - 5 = 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 5$. Pero $(xy + xz + yz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2$. Así, $(-1)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz(x + y + z)$. De donde $1 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(-5)(3) \Rightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 1 + 30 = 31$. Por lo tanto, de la expresión cuyo valor buscamos podemos concluir: $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 = 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 5 = 3(31) - 5 = 88$.

Problema 2.23.

Demuestre que $w^2 + (w+1)^2 + w^2(w+1)^2$ es un cuadrado perfecto, con w entero.

Solución del Problema 2.23.

Desarrollemos la expresión anterior: $w^2 + (w+1)^2 + w^2(w+1)^2 = w^2 + (w+1)^2 + (w(w+1))^2 = w^2 + (w+1)^2 + (w^2+w)^2 = w^2 + w^2 + 2w + 1 + (w^2+w)^2 = 2w^2 + 2w + 1 + (w^2+w)^2 = (w^2+w)^2 + 2(w^2+w) + 1$. Observemos que esta última expresión es un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto podemos escribir: $w^2 + (w+1)^2 + w^2(w+1)^2 = (w^2+w)^2 + 2(w^2+w) + 1 = \left((\mathrm{w}^2 + \mathrm{w}) + 1\right)^2$. Por lo tanto, $w^2 + (w+1)^2 + w^2(w+1)^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Problema 2.24.

Determinar el número de enteros positivos n, tales que $n^2 + 89$ es un cuadrado.

Solución del Problema 2.24.

Sabemos que $n^2 + 89$ debe ser un cuadrado entonces: $n^2 + 89 = x^2$. Por lo tanto, $89 = x^2 - n^2 \Rightarrow 89 = (x-n)(x+n)$. Dado que 89 es primo, cada uno de los factores en la expresión puede tomar únicamente los valores 89 y 1. Así tenemos: $x + n = 89 \Rightarrow x = 89 - n$; $x - n = 1 \Rightarrow (89 - n) - n = 1 \Longrightarrow -2n = -88 \Longrightarrow n = 44$. También podemos tener: $x + n = 1 \Rightarrow x = 1 - n$; $x - n = 89 \Rightarrow (1 - n) - n = 89 \Longrightarrow -2n + 1 = 89 \Longrightarrow -2n = 88 \Rightarrow n = -44$. Este valor no lo consideramos una solución, puesto que necesitamos los posibles valores positivos de n. Así que, 44 es el único entero positivo n tal que $n^2 + 89$ es un cuadrado.

Problema 2.25.

Encontrar los valores de x que satisfacen $(x-5)^{x^2-4}=1$

Solución del Problema 2.25.

La expresión será igual a 1 cuando la base sea igual a uno, cuando el exponente sea cero y cuando la base sea igual a -1 y el exponente sea par. En el primer caso, cuando la base sea igual a 1, tenemos: $x-5=1 \Rightarrow x=6$. En el segundo caso, cuando la base es igual a -1, tenemos: $x-5=-1 \Rightarrow x=4$ En este caso, el exponente será: $x^2-4=4^2-4=12$, que es par. Por lo tanto, la expresión completa tendrá valor 1 para $x=4$. En el tercer caso, cuando el exponente sea cero, tenemos: $x^2-4=0 \Longrightarrow x^2=4 \Longrightarrow x=\pm 2$. Por lo tanto, los valores de x para los que la expresión es igual a 1 son: $-2, 2, 4, 6$.

Problema 2.26.

¿Cuántos números enteros satisfacen la ecuación $(x^2-x-1)^{x^2-7x+12}=1$?

Solución del Problema 2.26.

Esta expresión será igual a 1 en cualquiera de los siguientes casos: Cuando la base x^2-x-1 sea igual a 1. Entonces, el valor total será igual a 1 independientemente del valor que asuma el exponente.

Cuando el exponente $x^2-7x+12$ sea igual a 0. Entonces será 1 independientemente del valor que asuma la base. Cuando la base x^2-x-1 sea igual a -1 y el exponente sea par, dado que -1 elevado a cualquier potencia par será 1 positivo.

Evaluemos cada uno de estos casos. Para el primer caso, cuando la base x^2-x-1 sea igual a 1, tendremos: $x^2-x-1=1 \Longrightarrow x^2-x=2 \Longrightarrow (x)(x-1)=2$. Dado que 2 es primo, para x tendremos dos posibles valore: $x=2$ y también $x-1=2 \Rightarrow x=3$. Para el segundo caso, tendremos que: $x^2-7x+12=0 \Longrightarrow (x-4)(x-3)=0$.

Entonces la expresión dará como resultado 0 cuando alguno de estos dos factores sea cero. Entonces, tendremos valores que cumplen con nuestras condiciones para: $x-4=0 \Longrightarrow x=4$; $x-3=0 \Longrightarrow x=3$.

Para el tercer caso, buscaremos si existe algún valor de x para el cual la base sea -1 y el exponente sea par. Evaluemos primero los valores para los que la base sea -1: $x^2 - x - 1 = -1 \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow (x)(x-1) = 0$. Por lo tanto, la base será igual a -1 cuando $x = 0$ y $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Ya encontramos dos valores de x para los cuales la base será -1. Ahora verifiquemos si el exponente resulta par para alguno de estos valores.

Para x=0 tenemos: $x^2 - 7x + 12 = 0^2 - 7(0) + 12 = 12$. Para $x = 1$ tenemos:$x^2 - 7x + 12 = 1^2 - 7(1) + 12 = 6$. Por lo tanto, para $x = 0$ y para $x = 1$, la expresión será 1.

En conclusión, la expresión tendrá un valor de 1 cuando x valga 0, 1, 2, 3 y 4. Por lo tanto, hay cinco enteros que satisfacen $(x^2 - x - 1)^{x^2-7x+12}$.

Problema 2.27.

Encuentre el valor de a si la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2 + ax - 2 = 0$ es 13.

Solución del Problema 2.27.

Notemos que $x^2 + ax - 2 = (x+p)(x+q) = 0$. Entonces, para algunos p y q que cumplen: $p + q = a$, $pq = -2$, y además $p^2 + q^2 = 13$. Combinando estos resultados tenemos que: $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = 13 + 2(-2) = 9$. Del resultado se deduce que $(p+q)^2 = 9 \Longrightarrow p + q = \pm 3$. por lo tanto, $a = \pm 3$.

Adicionalmente, verificaremos este resultado. Observemos que si $a = 3$. La solución de $x^2 + 3x - 2 = 0$ es $x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; $x_{1=}\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ y $x_{2=}\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$. Entonces se cumple que $x_1 + x_2 = -3$ y $x_1 * x_2 = -2$. Ahora verifiquemos que la suma de los cuadrados las raíces de la ecuación sea 13: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 3\sqrt{17} + \frac{17}{4} + \frac{9}{4} + 3\sqrt{17} + \frac{17}{4} = \frac{52}{4} = 13$.

Para $a = -3$, la solución de $x^2 - 3x - 2$ es $x = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. Entonces, hay dos soluciones: $x_{1=}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ y $x_{2=}\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Se cumple que $x_1 + x_2 = 3$ y $x_1 * x_2 = -2$. Verificando que la suma de los cuadrados las raíces sea 13: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 3\sqrt{17} + \frac{17}{4} + \frac{9}{4} - 3\sqrt{17} + \frac{17}{4} = \frac{52}{4} = 13$. En Conclusión, $a = \pm 3$.

Problema 2.28.

Si x, y son números enteros positivos con $xy = 18$, $xz = 3$, $yz = 6$. ¿Cuál es el valor de $x + y + z$?

Solución del Problema 2.28.

Despejando las expresiones iniciales obtenemos: $xy = 18 \Longrightarrow x = \frac{18}{y}$; $xz = 3 \Longrightarrow x = \frac{3}{z}$. Dado que ambas representan a la variable x podemos igualarlas: $\frac{18}{y} = \frac{3}{z} \Longrightarrow 18z = 3y \Longrightarrow y = 6z$. Sustituyendo en una de las expresiones iniciales tenemos: $yz = 6 \Longrightarrow (6z)z = 6 \Longrightarrow z^2 = 1 \Longrightarrow z = 1$. No consideramos la posibilidad de que z sea menor que cero, puesto que por las condiciones iniciales debe ser positivo. Utilizando algunas de las expresiones obtenidas anteriormente tenemos: $x = \frac{3}{z} = \frac{3}{1} \Longrightarrow x = 3$; $x = \frac{18}{y} \Longrightarrow y = \frac{18}{x} = \frac{18}{3} \Longrightarrow y = 6$. Por lo tanto, $x + y + z = 3 + 6 + 1 = 10$.

Problema 2.29.

Si $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{8}$ ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?

Solución 1 del Problema 2.29.

Dividiremos el numerador y el denominador del primer término entre y. De esta forma tenemos: $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{y}} = \frac{5}{8} \Longrightarrow \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1} = \frac{5}{8}$. Despejando $\frac{x}{y}$ obtenemos:

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{5}{8}\left(\frac{x}{y} - 1\right) \Longrightarrow \frac{x}{y} - \frac{5}{8}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{5}{8} - 1 \Longrightarrow \frac{3}{8}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{13}{8} \Longrightarrow \frac{x}{y} = -\frac{13}{3}.$$

Solución 2 del Problema 2.29.

Definamos $z = \frac{x}{y} \Longrightarrow zy = x$. Sustituyamos este valor en la expresión que nos es dada por el problema: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{zy+y}{zy-y} = \frac{y(z+1)}{y(z-1)} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{5}{8} \Longrightarrow z + 1 = \frac{5}{8}(z-1) \Longrightarrow 8(z+1) = 5(z-1) \Longrightarrow 8z + 8 = 5z - 5 \Longrightarrow 3z = -13 \Longrightarrow z = -\frac{13}{3}$.

Problema 2.30

Si a, b son números naturales $\{1,2,3 \ldots\}$ con $a + b + ab = 54$ Entonces, ¿cuál es el valor de $a + b$?

Solución del Problema 2.30.

Desarrollando la expresión dada en el problema tenemos la siguiente expresión: $a+b+ab=54 \Rightarrow a(b+1)+b=54 \Rightarrow a(b+1)+(b+1)=54+1 \Rightarrow (a+1)(b+1)=55$. Sabiendo que la descomposición en factores primos de 55 es $11*5$, existen dos posibilidades para los factores de la última expresión. La primera, que uno de los factores sea 11 y el otro 5. La segunda posibilidad es que uno sea 55 y el otro 1. Esta segunda posibilidad, sin embargo, resultará en uno de los valores a o b siendo igual a cero lo cual contradice una de las condiciones iniciales. Por lo tanto, solo necesitamos considerar la primera posibilidad: $a+1=5 \Rightarrow a=4;\ b+1=11 \Rightarrow b=10$. Por lo tanto, $a+b=14$.

Problema 2.31

Los números reales x, y, z cumplen que $x+y+z=0$. Demuestre que $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Solución del Problema 2.31.

Notemos que $(x+y+z)^3=\left((x+y)+z\right)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3(x^2+2xy+y^2)z+3xz^2+3yz^2+z^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+6xyz+3x^2z+3y^2z+3xz^2+3yz^2=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3xyz+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3y^2z+3yz^2$. Pero sabemos que $x+y+z=0$ Por lo tanto: $x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3\text{xz}(x+y+z)+3y^2z+3yz^2=x^3+y^3+z^3+3y^2z+3yz^2=x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)$. También podemos deducir que $x+y+z=0 \Rightarrow y+z=-x$. Sustituyamos este resultado en la expresión anterior: $x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)=x^3+y^3+z^3+3yz(-x)=x^3+y^3+z^3-3xyz$. De donde $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz \Rightarrow \left(\underbrace{x+y+z}_{0}\right)^3=x^3+y^3+z^3-3xyz \Rightarrow 0=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Finalmente, $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Problema 2.32.

Sea a, b, c números enteros y $a+b+c=0$ Demostrar que $a^4+b^4+c^4$ es divisible por $a^2+b^2+c^2$.

Solución del Problema 2.32.

Notemos que $\Big(\underbrace{a+b+c}_{0}\Big)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc) \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 4(ab+ac+bc)^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2) \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2) \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+2abc(a+b+c)) \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 4\Big(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+2abc(\underbrace{a+b+c}_{0})\Big) = 4(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2)$. Luego tenemos que $(a^2+b^2+c^2)^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2)$. Sustituyamos esta expresión en el desarrollo del cuadrado: $(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2c^2b^2 = a^4+b^4+c^4+2(\mathrm{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2}) = \mathrm{a^4+b^4+c^4}+\frac{1}{2}[4(\mathrm{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2})] = \mathrm{a^4+b^4+c^4}+\frac{1}{2}(\mathrm{a^2+b^2+c^2})^2$.

Entonces, $(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$. Restando $-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$ a ambos términos tenemos: $(a^2+b^2+c^2)^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4$.

Calculemos ahora la división $\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) =$

$\frac{1}{2}(-2(ab+ac+bc)) = -(ab+ac+bc) \Longrightarrow \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2} = -(ab+ac+bc)$ que es un entero. Esto demuestra la divisibilidad.

Problema 2.33.

Si $\mathrm{x+y+2z=k}$ y también $\mathrm{x+2y+z=k}$ y además $\mathrm{2x+y+z=k, k\neq 0}$; Determinar $\mathrm{x^2+y^2+z^2}$ en función de k. ¿Qué representa k en términos geométricos?

Solución del Problema 2.33.

Con base a las expresiones dadas inicialmente tenemos que: $\mathrm{x+y+2z=x+2y+z \Longrightarrow y+2z=2y+z \Longrightarrow 2z-z=2y-y \Longrightarrow z=y}$; $\mathrm{x+2y+z=2x+y+z \Longrightarrow x+2y=2x+y \Longrightarrow 2y-y=2x-x \Longrightarrow y=x}$. Por lo tanto, $x=y=z$. Sustituyamos esto en una de las condiciones iniciales: $\mathrm{x+y+2z=k} \Longrightarrow x+x+$

$2x = 4x = k \Longrightarrow x = y = z = \frac{k}{4}$. De esto deducimos que: $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{4}\right)^2 + \left(\frac{k}{4}\right)^2 = 3\frac{k^2}{16} = \frac{3}{16}k^2$.

En términos geométricos, en un espacio cartesiano, esta expresión representa esferas de radio $\frac{\sqrt{3}}{4}k$ con centro en $(0,0,0)$. Observemos que tendremos una esfera diferente para cada valor de k. Por tener todas estas esferas el mismo centro, decimos que son concéntricas.

Problema 2.34.

Juanita escribió en la pizarra 5 números al azar. De estos números, la media y la mediana son 9, y la moda 11. ¿Cuáles fueron los números originalmente escritos en la pizarra?

Solución del Problema 2.34.

Representaremos cada elemento desconocido con un guion bajo. Como no conocemos todavía ningún elemento el conjunto lo representaremos como: _, _, ,_ _, _. Puesto que la mediana es 9, tendremos que en orden el conjunto luce como: _, _, 9, _, _. Si la moda es 11, entonces 11 es un elemento del subconjunto. Además, debe de repetirse más de una vez puesto que ya tenemos al 9 en el conjunto. Por tanto, nuestro conjunto queda por el momento como: _, _, 9, 11, 11. Luego tenemos que colocar en las otras dos casillas elementos tales que el promedio sea 9. Esto lo podemos lograr agregando dos elementos 7, puesto que el promedio entre uno de los elementos 7 y un elemento 11 será 9. Así quedaría: 7, 7, 9, 11, 11

Con estos números, sin embargo, la moda no sería 11. Por lo tanto debemos modificar los dos números 7 sin que se modifique el promedio ni la mediana. Si sumamos y restamos uno a los números, nos quedan 6 y 8. Así, no se modifica la suma total y por tanto no se modifica la media. También son menores que 9, por lo que 9 sigue siendo la mediana. Así, al final, el grupo de números nos queda: 6, 8, 9, 11, 11; que cumplen todas las condiciones esperadas.

Problema 2.35.

Tenemos 10 números, el promedio de estos es 20, removemos uno de estos números cambiando el promedio a 19, ¿Qué número fue retirado?

Solución del Problema 2.35.

Sean $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{10}$. los diez números. El promedio es: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_{10}}{10} = 20$. Y la suma de los diez números es entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_{10} = 200$. Supongamos que removemos el término $\mathbf{x}_i$, el promedio de los números será: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{9} = 19$ y su suma es $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 171$. Con esta información podemos escribir: $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}+x_i}{10} = 20 \Rightarrow \frac{171+x_i}{10} = 20 \Rightarrow 171 + x_i = 200 \Rightarrow x_i = 29$. Por lo tanto, el número retirado es 29.

Problema 2.36.

Si $x < -2$ entonces a qué es igual $\left|1 - |1 + x|\right|$.

Solución del Problema 2.36.

Este problema es equivalente a resolver para $x = -k$ donde $k > 2$. Tendremos: $\left|1 - \left|1 + x\right|\right| = \left|1 - \left|1 + \left(-k\right)\right|\right|$. Observemos que en este caso $-k < -2$. Por lo tanto, al sumarle 1 el resultado será siempre negativo.

Entonces: $\left|1 - \left|1 + \left(-k\right)\right|\right| = \left|1 - \left|-\left(k-1\right)\right|\right| = \left|1 - \left(k-1\right)\right| = \left|-\left(k-2\right)\right| = k - 2$. Así, para $x < -2$ tendremos que: $\left|1 - \left|1 + x\right|\right| = -x - 2$.

Problema 2.37.

¿Cuántos enteros positivos satisfacen la desigualdad

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^1 \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 ... \left(x - \frac{4025}{2}\right)^{4025} < 0?$$

Solución del Problema 2.37.

Por simplicidad definiremos $S = 1 + 3 + \cdots + 4021$. En la expresión original operemos para simplificar: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^1 \left(x - \frac{3}{2}\right)^3 ... \left(x - \frac{4025}{2}\right)^{4025} = \left(\frac{2x}{2} - \frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{2x}{2} - \frac{3}{2}\right)^3 ... \left(\frac{2x}{2} - \frac{4025}{2}\right)^{4025} = \left(\frac{2x-1}{2}\right)^1 \left(\frac{2x-3}{2}\right)^3 ... \left(\frac{2x-4025}{2}\right)^{4025} = \frac{(2x-1)^1}{2^1} * \frac{(2x-3)^3}{2^3} ... \frac{(2x-4025)^{4025}}{2^{4021}} =$

$2^{-S}(2x-1)^1(2x-3)^3 \ldots (2x-4025)^{4025}$. Entonces, $2^{-S}(2x-1)^1(2x-3)^3 \ldots (2x-4025)^{4025} < 0$.

Para que se cumpla la desigualdad, será necesario que una cantidad impar de factores sea menor que cero. Observemos también que 2^{-S} será siempre positivo. Por lo tanto, el problema original es equivalente a resolver: $(2x-1)^1(2x-3)^3 \ldots (2x-4023)^{4023}\,(2x-4025)^{4025} < 0$. Y este a su vez, debido a que los exponentes son todos impares, es equivalente a resolver: $(2x-1)(2x-3)\ldots(2x-4023) < 0$. En donde podemos observar que: $2x-1 > 2x-3 > \cdots > 2x-4023 > 2x-4025$.

Observemos que para $x = 2013$, el menor factor será $2 * 2013 - 4025 = 4026 - 4025$. El resultado es positivo. Al ser éste el menor de los demás, está garantizado que también son positivos. Para $x = 2012$, tenemos: $2 * 2012 - 4025 = 4024 - 4025 = -1$ que será un número negativo. Puesto que los factores difieren en 2, todos los demás factores serán positivos. Para $x = 2011$, el siguiente factor también será negativo resultando en un valor positivo para la expresión completa, y así sucesivamente. De modo que el resultado será negativo para todos los x pares. El mayor factor será negativo cuando x sea igual a 0. Observemos: $2x - 1 = 2 * 0 - 1 = -1$. De esto deducimos que la condición se cumplirá para $x = 0, 2, 4, \ldots 2012$. Sin embargo, por las condiciones del problema, x solo puede tomar valores positivos. Por lo tanto, la propiedad se cumplirá para los números enteros positivos 2, 4, … , 2012. En total, hay 1006 enteros positivos que satisfacen la desigualdad.

Problema 2.38.

Supongamos que $f(x) = ax + b$, con a, b números reales. Definimos $f_1(x) = f(x)$ y $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ para todos los enteros positivos n. Si $f_7(x) = 128x + 381$ ¿Cuál es el valor de $a + b$?

Solución del Problema 2.38.

Observemos que para obtener la expresión para $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ es una composición de funciones. Para algunos valores de n tendremos: $f_1(x) = f(x) = ax + b$; $f_2(x) = f_{1+1}(x) = f\big(f(x)\big) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$; $f_2(x) = f_{2+1}(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$; …

De lo anterior, observamos claramente que para cada nuevo $f_{n+1}(x)$ la expresión del anterior se multiplica todo por a y se le suma b comenzando con

$ax+b$ para $n=0$. Por lo tanto, tenemos que la expresión general para $f_n(x)$ nos queda: $f_n(x)=a^n x+(a^{n-1}+\cdots+a^0)b$. De aquí que: $f_7(x)=a^7x+(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a^1+a^0)b$. De acuerdo con las condiciones iniciales, sabemos que: $f_7(x)=128x+381$. Entonces, $a^7=128=\ 2^7\Longrightarrow a=2$. Y también,$(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a^1+a^0)b=\left(2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0\right)b=127b=381\Longrightarrow b=\frac{381}{127}=3$. Por lo tanto, $a+b=2+3=5$.

Problema 2.39.

Dada la función $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$, deducir $f(x^2-1)$

Solución del Problema 2.39.

Observemos que podemos factorizar de la siguiente forma: $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3=(x^4+x^2)+(4x^2+4)-1=x^2(x^2+1)+4(x^2+1)-1\Longrightarrow f(x^2+1)=(x^2+4)(x^2+1)-1=\Big((x^2+1)+3\Big)(x^2+1)-1=(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1$. De lo anterior, podemos concluir que $f(n)=n^2+3n-1$. Por lo tanto, $f(x^2-1)=(x^2-1)^2+3(x^2-1)-1d=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$.

Problema 2.40.

Para todo real x, la función $f(x)$ satisface $2f(x)+f(1-x)=x^2$ para todo valor real de x. Calcular $f(5)$.

Solución del Problema 2.40.

Dado que $2f(x)+f(1-x)=x^2$ obtenemos: $2f(5)+f(-4)=5^2\Longrightarrow f(5)=\frac{25-f(-4)}{2}$. Ahora, de forma análoga, construyamos una expresión para $f(-4)$: $2f(-4)+f(5)=(-4)^2\Longrightarrow f(-4)=\frac{16-f(5)}{2}$. Luego, sustituyendo $f(-4)$ en la primera expresión por el resultado obtenido en la segunda tenemos $f(5)=\frac{25-f(-4)}{2}=\frac{25-\left[\frac{16-f(5)}{2}\right]}{2}$. Despejando $f(5)$ en la expresión anterior obtenemos $f(5)=\frac{34}{3}$.

Problema 2.41.

Sea f una función cuyo dominio son todos los reales: $f(x)+2f\left(\frac{x+2013}{x-1}\right)=4028-x$. Calcular el valor de $f(2015)$, si $x\neq 1$.

Solución del Problema 2.41.

Para $x = 2$, tenemos: $f(2) + 2f\left(\frac{2+2013}{2-1}\right) = 4028 - 2 \Longrightarrow f(2) + 2f(2015) = 4026$. De esto se deduce que $f(2) = 4026 - 2f(2015)$. Para $x = 2015$ tendremos: $f(2015) + 2f\left(\frac{2015+2013}{2015-1}\right) = 4028 - 2015 \Longrightarrow f(2015) + 2f(2) = 2013$.

De aquí que $f(2015) = 2013 - 2f(2)$. Sustituyendo la expresión que obtuvimos para $f(2)$ en la expresión para $f(2015)$ tenemos: $f(2015) = 2013 - 2f(2) \Rightarrow f(2015) = 2013 - 2[2 * 2013 - 2f(2015)] \Rightarrow f(2015) = 2013 - 4(2013) + 4f(2015) \Rightarrow -3f(2015) = -3(2013) \Longrightarrow f(2015) = \frac{-3(2013)}{-3} \Rightarrow \mathrm{f}(2015) = 2013$.

Problema 2.42.

Encuentre el valor de $f_{100}(3)$, si $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ Y $f_{n+1}(x) = f_0\big(f_n(x)\big)$.

Solución 1 del Problema 2.42.

Observemos que para el caso general de $f_{n+1}(x)$ tenemos: $f_{n+1}(x) = f_0\big(f_n(x)\big) = \frac{1}{1-f_n(x)}$. Ahora consideremos los siguientes casos específicos: para $x = 3$ tenemos $\mathrm{f}_0(3) = \frac{1}{1-(3)} = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{f}_1(3) = \mathrm{f}_{0+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_0(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_0(3)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; $\mathrm{f}_2(3) = \mathrm{f}_{1+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_1(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_1(3)} = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

Observemos que de aquí en adelante los valores se repetirán. Por ejemplo $\mathrm{f}_3(3) = \mathrm{f}_{2+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_2(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_2(3)} = \frac{1}{1-(3)} = \mathrm{f}_0(3) = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{f}_4(3) = \mathrm{f}_{3+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_3(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_3(3)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{f}_1(3) = \frac{2}{3}$; $\mathrm{f}_5(3) = \mathrm{f}_{4+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_4(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_4(3)} = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = \mathrm{f}_2(3) = 3$. Y dado que el valor de $f_{n+1}(x)$ está determinado en función de $f_n(x)$ de la forma anteriormente definida, entonces los valores siguientes serán repeticiones de los anteriores. De este modo, para n de la forma 3k, donde k es entero, tendremos que $f_{3k}(x) = -\frac{1}{2}$.

Para n de la forma 3k+1 tenemos $f_{3k+1}(x) = \frac{2}{3}$; $f_{3k+2}(x) = 3$. Observemos que el número 100 se puede escribir como 99+1 = 3(33)+1 Es decir, que 100 es de la forma 3k+1. Por lo tanto $f_{100}(3) = \frac{2}{3}$.

Solución 2 del Problema 2.42.

Sabemos que $\mathrm{f}_0(3) = \frac{1}{1-(3)} = -\frac{1}{2}$. Ahora, tomemos un $\mathrm{f}_\mathrm{n}(3) = -\frac{1}{2}$ Observemos que en este caso qué los siguientes valores serán: $\mathrm{f}_{\mathrm{n}+1}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_\mathrm{n}(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_\mathrm{n}(3)} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$; $\quad \mathrm{f}_{\mathrm{n}+2}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_{\mathrm{n}+1}(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_{\mathrm{n}+1}(3)} = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 3$; $\quad \mathrm{f}_{\mathrm{n}+3}(3) = \mathrm{f}_0\big(\mathrm{f}_{\mathrm{n}+2}(3)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{f}_{\mathrm{n}+2}(3)} = \frac{1}{1-(3)} = -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, los valores en que resultará $f_i(3)$ se repetirán en un ciclo de tres, dado que $f_0(3) = -\frac{1}{2}$, también $f_3(3) = f_6(3) = \cdots = f_{3k}(3) = -\frac{1}{2}$ para un k entero.

De igual forma, podemos concluir que $f_{3k+1}(3) = \frac{2}{3}$ y también $f_{3k+2}(3) = 3$. Dado que 100 es de la forma $3k+1$ entonces $f_{100}(3) = f_{3k+1}(3) = \frac{2}{3}$.

Problema 2.43.

Calcular $f(2013)$, si $f\left(3x + \frac{1}{3x}\right) = 9x^2 + (9x^2)^{-1}$.

Solución del Problema 2.43.

Hagamos $3x + \frac{1}{3x} = 2013 \Rightarrow \left(3x + \frac{1}{3x}\right)^2 = 2013^2 \Longrightarrow (3x)^2 + 2\underbrace{(3x)\left(\frac{1}{3x}\right)}_{1} + \left(\frac{1}{3x}\right)^2 = 2013^2 \Longrightarrow (3x)^2 + 2 + \left(\frac{1}{3x}\right)^2 = 2013^2 \Longrightarrow 9x^2 + \left(\frac{1}{9x^2}\right) = 2013^2 - 2$.

Por lo tanto: $f(2013) = 2013^2 - 2$.

Problema 2.44.

Hallar $f(2013)$ si $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 2013$ y $f(x) = f(-x)$.

Solución del Problema 2.44.

Observemos que: $f(0+1) = f(0) + f(1) + 2*0*1 + 2013 = f(0) + f(1) + 2013 \Rightarrow f(0) = -2013$. Luego hagamos $f(2013-2013) = f(2013) + f(-2013) + 2(2013)(-2013) + 2013$

Dado que $f(x) = f(-x)$ la anterior expresión es equivalente a $f(0) = f(2013) + f(2013) - 2\left(2013^2\right) + 2013 \Rightarrow -2013 = 2f(2013) - 2\left(2013^2\right) + 2013 \Longrightarrow f(2013) = \frac{2\left(2013^2\right) - 2(2013)}{2} \Rightarrow f(2013) = 2013^2 - 2013 = 4050156$.

Problema 2.45.

La sucesión $\{u_n\}$ definida sobre los números naturales $u_1 = 1, u_2 = 2,\ u_{n+2=}\ 3\,u_{n+1} - 2u_n$ y sea $V_n = u_{n+1} - u_n$ Mostrar que v_n es una sucesión geométrica.

Solución del Problema 2.45.

De acuerdo con la definición, el primer término de las V_i es $V_n = u_{n+1} - u_n$ El primer término de la secuencia será: $V_1 = u_2 - u_1 = 2 - 1 = 1$. Ahora, dado que $V_n = u_{n+1} - u_n$, observemos la forma del siguiente término: $V_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$.

Utilizando las condiciones iniciales tenemos: $V_{n+1} = (3\,u_{n+1} - 2u_n) - u_{n+1} = 2(u_{n+1} - u_n) = 2V_n$. Esto indica que cada elemento de la sucesión es el doble del anterior. Por lo tanto, la sucesión es geométrica.

Problema 2.46.

Los cinco primeros términos de una progresión aritmética son $8, a, b, c, 3a$. Calcular el séptimo término de la progresión.

Solución del Problema 2.46.

Como es una progresión aritmética consideremos $a_1 = 8, a_2 = a, a_3 = b, a_4 = c, a_5 = 3a$ y se cumple que $a_1 = a_1$; $a_2 = a_1 + k$; $a_3 = a_2 + k$; $a_4 = a_3 + k$; $a_5 = a_4 + k$. Sustituyendo tenemos $a_1 = 8$; $a_2 = 8 + k$; $a_3 = 8 + 2k$; $a_4 = 8 + 3k$; $a_5 = 8 + 4k$. Pero $a_5 = 3a \Rightarrow 8 + 4k = 3a$ y $a_2 = a \Rightarrow 8 + k = a$. Con esta información armamos el sistema $\begin{cases} 8 + 4k = 3a \\ 8 + k = a \end{cases}$

Restando las ecuaciones obtenemos: $(8 + 4k) - (8 + k) = 3\text{a} - \text{a} \Rightarrow 3k = 2a \Rightarrow k = \frac{2}{3}a \Rightarrow 8 + \frac{2}{3}a = a \Rightarrow \frac{2}{3}a - a = -8 \Rightarrow -\frac{1}{3}a = -8 \Rightarrow a = 24$. Deducimos que $8 + k = 24 \Rightarrow k = 16$. Así, los términos serian $a_1 = 8$; $a_2 = 24$; $a_3 = 40$; $a_4 = 56$; $a_5 = 72$. Deducimos que: $a_6 = 8 + 5k = 8 + 5(16) = 88$ y, finalmente, $a_7 = 8 + 6k = 8 + 6(16) = 104$.

Problema 2.47.

Si $y - 1, 2y + 2, 7y + 1$ son los tres primeros términos de una sucesión geométrica de números enteros, determine el valor de y.

Solución del Problema 2.47.

Notemos que $y-1$, $2y+2, 7y+1$ son términos de una sucesión geométrica de números enteros, por lo que se deduce que $a_1 = a = y-1$; $a_2 = ar = (y-1)r = 2y+2$; $a_3 = ar^2$=$(y-1)r^2 = 7y+1$. De la expresión anterior para a_2 tenemos: $a_2 = ar = (y-1)r = 2y+2 \Rightarrow \frac{2y+2}{y-1} = r$.

Sustituyendo en a_3 tenemos: $(y-1)\left(\frac{2y+2}{y-1}\right)^2 = 7y+1$. Entonces, $(2y+2)^2 = (7y+1)(y-1) \Rightarrow 4y^2+8y+4 = 7y^2-7y+y-1 \Rightarrow -3y^2+14y+5 = 0$.

Resolviendo tenemos: $y = \frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(-3)(5)}}{2(-3)} = \frac{-14\pm\sqrt{196+60}}{-6} = \frac{-14\pm\sqrt{256}}{-6} = \frac{-14\pm 16}{-6}$. De donde obtenemos dos soluciones: $y_1 = \frac{-14+16}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$ y $y_2 = \frac{-14-16}{-6} = \frac{-30}{-6} = 5$. La primera solución, y_1, podemos descartarla porque no resultaría en una sucesión de enteros. Para $y=5$, obtenemos una sucesión de enteros: 4, 12, 36. Por lo tanto, $y=5$.

Problema 2.48.

Sea n un entero tal que $Log_2^3 * Log_3^4 * Log_4^5 \dots Log_n^{n+1} = 2005$. ¿Es n par o impar?

Solución del Problema 2.48.

Utilizando el cambio de base $Log_a^b = \frac{Lnb}{Lna}$, Notemos que:

$Log_2^3 * Log_3^4 * \dots * Log_n^{n+1} = \frac{Ln3}{Ln2} * \frac{Ln4}{Ln3} * \dots * \frac{Ln(n+1)}{Ln(n)}$. De esto deducimos que:

$\frac{Ln3}{Ln2} * \frac{Ln4}{Ln3} * \frac{Ln5}{Ln4} * \frac{Ln6}{Ln5} * \dots * \frac{Ln(n)}{Ln(n-1)} \frac{Ln(n+1)}{Ln(n)} = 2005 \Rightarrow \frac{1}{Ln(2)} * Ln(n+1) = 2005 \Rightarrow$

$\frac{1}{Ln(2)} * n(n+1) = 2005 \Rightarrow \mathrm{Log}_2^{n+1} = 2005 \Rightarrow 2^{2005} = n+1 \Rightarrow n = 2^{2005}-1$ que es un número impar.

Problema 2.49.

Dado $log_9 20 = a$ y $log_3 n = 4a$ ¿Cuál es el valor de n?

Solución del Problema 2.49.

Las expresiones logarítmicas anteriores pueden expresarse también de forma exponencial: $log_9 20 = a \Longrightarrow 9^a = 20$; $log_3 n = 4a \Longrightarrow 3^{4a} = n \Longrightarrow \left(3^2\right)^{2a} = n \Rightarrow 9^{2a} = n$. Sabemos que $9^a = 20$.

Utilizando esta información obtenemos que: $n = 9^{2a} = (9^a)^2 = 20^2 = 400$.

Problema 2.50.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} Log_{10}x^3 + Log_{10}y^2 = 11 \\ Log_{10}x^2 - Log_{10}y^3 = 3 \end{cases}$

Solución del Problema 2.50.

Reescribamos las expresiones dadas utilizando la propiedad $Log_a\, x^n = n\, Log_a\, x$. Así obtenemos $\begin{cases} 3\, Log_{10}\, x \;+\; 2\, Log_{10} y \;=\; 11 \\ 2 Log_{10} x \;-\; 3\, Log_{10} y \;=\; 3 \end{cases}$. Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -3 obtenemos $\begin{cases} 6\, Log_{10}\, x \;+\; 4\, Log_{10}\, y = 22 \\ -6\, Log_{10}\, x + 9\, Log_{10}\, y \;= -9 \end{cases}$. Sumando estas dos ecuaciones tenemos $13 Log_{10} y = 13 \Longrightarrow Log_{10} y = 1 \Longrightarrow y = 10^1 = 10$. Ahora sustituyamos este valor en el sistema de ecuaciones que obtuvimos inicialmente. De esta forma obtenemos el valor de x: $3\, log_{10}\, x + 2\, Log_{10} y = 11 \Longrightarrow 3\, log_{10}\, x + 2\, Log_{10} 10 \; = 11 \Longrightarrow 3\, log_{10}\, x + 2\,(1) = 11 \Longrightarrow \; log_{10}\, x = 3 \Longrightarrow x = 10^3 = 1000$.

Bibliografía Recomendada

Colvin, G. (2008) Talent is overrated: What really separates World-Class Performers from Everybody Else. London: Penguin Group.

Erickson, M. (2009) Aha! Solutions. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Escudero, J. (1999) Resolución de Problemas Matemáticos. Salamanca: Centro de Profesores y Recursos Salamanca.

Gardner, M. (1988) Matemática para Divertirse: Un Paseo por las Diversas Ramas de la Matemática a Través de más de 50 Problemas de Ingenio (M. Rosemberg). Buenos Aires: Ediciones Juan Granica S.A. (Trabajo original publicado en 1986)

Hammack, R. (2013) Book of Proof. Disponible en http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/index.html. Virginia: Virginia Common Wealth University, Department of Mathematics & Applied Mathematics.

Paenza, A. (2010) Matemática... ¿Estás Ahí?: La Vuelta al Mundo en 34 Problemas y 8 Historias. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza. Buenos Aires: Siglo Veintiuno editores.

Paenza, A. (2010) Matemática Para Todos. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza. Buenos Aires: Siglo Veintiuno editores.

Perelman, Y. I. (1979) Algebra Can Be Fun (G. Yankovsky). Moscú: Mir Publishers. (Trabajo original publicado en 1975)

Posamentier, A. S. (2003) Math Wonders: to Inspire Teachers and Students. Virginia, Alexandria: ASCD Publictions.

Poundstone, W. (2012) *Are You Smart Enough to Work at Google?* Nueva York: Little Brown Company.

Sloane, P. (1994*) Great Lateral Thinking Puzzles*. Nueva York: Sterling Publishing Company, Inc.

Soifer, A. (2009) *Mathematics as Problem Solving* (Segunda Edición). Colorado: Springer Science+Business Media, LLC.

Tahan, M. (1991*) Matemática Divertida E Curiosa*. Rio de Janeiro: Distribuidora Record De Serviços De Impremsa S.A.

Zeitz, P. (2007) Art And Craft of Problem Solving. New Jersey: John Wiley & Sons.

Referencias Web Recomendadas

http://abelkonkurransen.no/problems.php?lan=no

http://cms.math.ca/crux/

http://centromatematico.uregina.ca

http://people.okanagan.bc.ca/clee/bcssmc/

http://projecteuler.net/

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

http://math.columbusstate.edu/tournament/

http://mathonline.missouri.edu/

http://mathcontest.olemiss.edu

http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/AMC_Problems_and_Solutions

http://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/contests.html

http://www.furthermaths.org.uk/stmchallengepast.php
http://www.wpr3.co.uk/MC/probs.html

http://www.math.ualberta.ca/~ahsmc/

http://www.math.sc.edu/contest/problems.html

http://www.mathcomp.leeds.ac.uk/

http://www.math.hmc.edu/putnam/

http://www.tanyakhovanova.com/MathOlymp/mathcomp.html#international

Artículos Sobre Resolución de Problemas

Cruz, M. (2006): La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana.
http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion_de_problemas.pdf

El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje
http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica
http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

La resolución de problemas. Una revisión teórica
http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf

Resolución de Problemas Matemáticos.
http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/Resoluciondeproblemas.pdf

Los materiales de autoformación e innovación docente, son un esfuerzo del Gobierno de El Salvador para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas. Estos difunden una visión vívida y dinámica de la ciencia y la matemática, con un enfoque de ciencia, tecnología e innovación (Enfoque CTI).

Agradecemos a la Universidad Politécnica de El Salvador su apoyo a través del proyecto Desafió Politécnica, por su rol en la formación y desarrollo de RESPROMAT y a Fundación CIDECO de El Salvador por el trabajo desarrollado hombro con hombro con la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación, siendo uno los frutos de este trabajo conjunto el presente libro de resolución de problemas.