XXIII Olimpiada Nacional de Matemática

Grados participantes: desde 4º hasta 1er año de bachillerato.

Primera Fase: del 5 al 14 de febrero.

Segunda Fase: 11 de marzo.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XXIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2023.

SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2023. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe deben inscribirse colocando el grado en el que estudian actualmente; pero realizarán la prueba del grado que iniciarán en 2023. Por ejemplo, si actualmente se encuentran estudiando quinto grado, deberán inscribirse en quinto grado y en el sitio de la olimpiada se habilitará la prueba para sexto grado, cuando pertenezcan a un colegio del sistema internacional.

Indicaciones:

- Estudiantes de primero, segundo y tercer grado pueden realizar la prueba de cuarto grado.
- La participación de todo estudiante será admitida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas y numeradas. Además, cada página deberá contener el nombre y apellido completo del estudiante.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, **no serán tomadas en cuenta**. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es necesario enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, ordenadas y sin tachaduras.

- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. **No se aceptarán soluciones a lápiz**. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.
- Para la entrega en línea, las soluciones de cada ejercicio deben ser escaneadas de forma individual, es decir, si el estudiante resuelve los 5 ejercicios, deberá crear 5 archivos. Éstos deberán ser escaneados con la mayor claridad posible y enviarse en formato PDF. Soluciones que no sean legibles serán descalificadas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la vigésimo tercera Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **5 al 13 de febrero**.
- Completar el formulario de inscripción en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro` a más tardar el **14 de febrero** a las 3:00 p.m.
- Unas horas después de haber realizado la inscripción, los estudiantes de **nuevo ingreso** recibirán en el correo electrónico las credenciales (usuario y contraseña) para poder ingresar en el aula virtual: `https://olimpiadas.jovenestalento.edu.sv/`. También puede encontrar estas credenciales ingresando con su cuenta al mismo sitio en el que se inscribió.

  En el caso de los estudiantes de **antiguo ingreso**, recibirán en el correo electrónico las indicaciones para poder ingresar con su cuenta institucional en el aula virtual: `https://olimpiadas.jovenestalento.edu.sv/`. Este proceso puede tomar hasta 24 horas. En esta aula virtual podrá encontrar más indicaciones acerca de la entrega de la prueba
- En casos particulares en los que el estudiante no tenga acceso a conexión de Internet o equipo informático adecuado, se dará la oportunidad de entregar la prueba en las oficinas del Programa Jóvenes Talento (PJT) de la Universidad de El Salvador, sedes occidental y oriental. Además, se pueden entregar en las Direcciones Departamentales de del Ministerio de Educación. Las soluciones deberán ser entregadas en el interior de un sobre de papel manila sellado. Para este efecto deberá imprimir el formulario correspondiente que aparece en el sitio de inscripción, dicho formulario se colocará como carátula del sobre de papel manila.
- La fecha de entrega de las pruebas de forma presencial se encuentra descrita a continuación:

  Sede occidental del PJT, en la oficina del programa en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente UES (Santa Ana) los días lunes 13 y martes 14 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m. y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

  Sede oriental del PJT, en la entrada del edificio del sistema bibliotecario de la Facultad Multidisciplinaria Oriental UES (San Miguel) los días lunes 13 y martes 14 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

  Direcciones Departamentales del Ministerio de Educación, en cualquiera de sus 14 sedes los días martes 14 y miércoles 15 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

REGISTRO

Para hacer efectivo el ingreso de datos, acceder al sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro`. Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, Número de Identificación Estudiantil (NIE), nombre de la persona responsable, teléfono y correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y/o nombre.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las participaciones de la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar en cada grado deberán realizar una prueba presencial el **sábado 11 de marzo** del presente año. La prueba se administrará en las sedes del Programa Jóvenes Talento.

Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en `http://www.jovenestalento.edu.sv` desde la tarde del **martes 7 de marzo de 2023**. Dichos listados incluirán información acerca del lugar y horario en el que se realizará dicha prueba. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación organiza en cooperación con la Universidad de El Salvador. El PJT tiene diferentes componentes cuyos objetivos son descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcar en sus participantes la disciplina y el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, así como desarrollar en ellos capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, durante 30 sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.

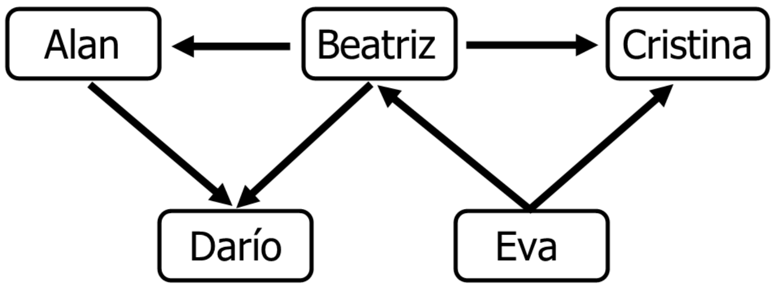
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Astronomía, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.

La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el día **martes 28 de marzo de 2023**. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **1 de abril de 2023** con clases presenciales durante los turnos matutino y vespertino.

Cuarto Grado

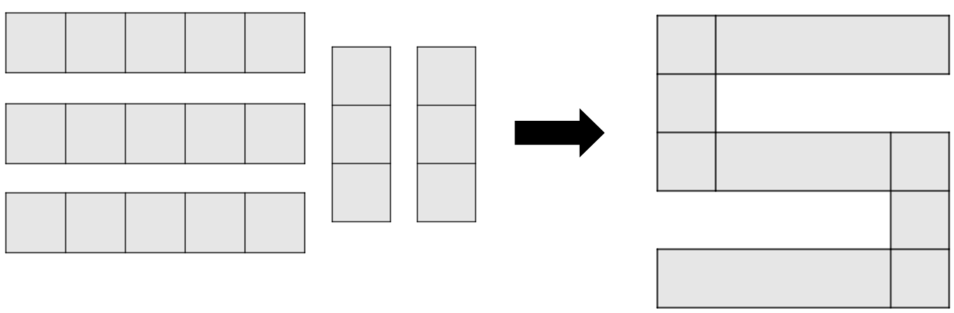
Problema 1

Alan, Beatriz, Cristina, Darío y Eva son cinco amigos que han escrito sus nombres en el siguiente esquema que los relaciona dos a dos. La persona señalada por la punta de la flecha es de menor edad que la persona de quien sale la flecha. Analizar el esquema y determinar quién de los cinco amigos es el mayor de todos.



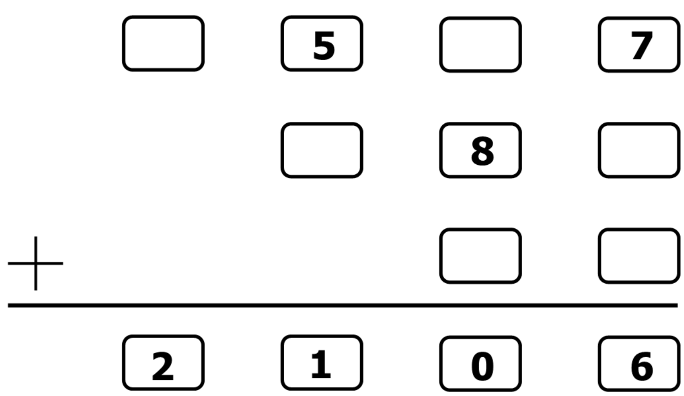
Problema 2

Sara corta cinco tiras de papel cuadriculadas de una cara y lisas de la otra, luego las acomoda de tal forma que puede construir la letra inicial de su nombre. Si cada cuadradito mostrado tiene 1 *cm* de lado, ¿cuánto mide el perímetro de la figura en forma de S?



Problema 3

Memito coloca los números del 1 al 9 sin repetirse en la siguiente suma. Determinar todas las formas en que Memito pudo escribir los seis números restantes para que la suma sea correcta.



Problema 4

Los números 1, 2, 3 y 4 compitieron en una carrera la semana pasada y la premiación será el día de mañana. El jurado perdió los resultados y solo recuerdan el primero y el último lugar, así que los entrevistaron para obtener información.

El primer lugar comentó:

"*En meta cuando vi para atrás ningún otro número era mayor que yo, únicamente me superaban al sumarse*".

El último en llegar a la meta dijo:

"*La suma de nosotros cuatro es mayor que el producto del primero y segundo lugar*".

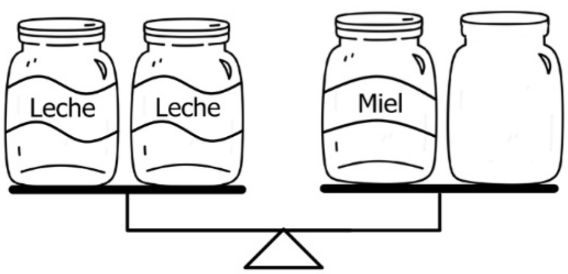
Para el jurado no fue suficiente esta información, pero justo antes de retirarse el último lugar añadió:

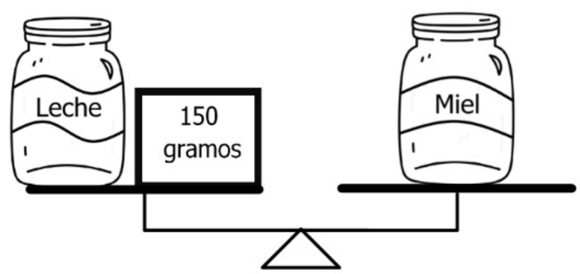
"*Ahora que recuerdo, también noté que la suma del tercer lugar conmigo da el mismo resultado que la suma de los primeros dos lugares*".

Determinar el número que cruzó la meta en segundo lugar.

Problema 5

Las balanzas que se muestran a continuación están en perfecto equilibrio. En la balanza de la izquierda se puede observar que dos tarros llenos de leche pesan lo mismo que un tarro lleno de miel y un tarro vacío; en la balanza de la derecha se ha colocado un tarro lleno de leche y un objeto de 150 gramos para mantener el balance con un tarro lleno de miel. Además, se sabe que un tarro lleno de leche pesa 350 gramos. Determinar cuántos gramos pesa un tarro vacío.





Quinto Grado

Problema 1

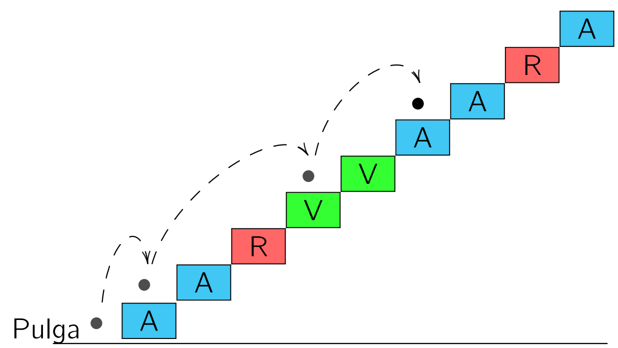
En una tienda empacan cuatro cajas con flores y las etiquetan como muestra el siguiente esquema.

❶ Rosas ocres	❷ Lirios blancos	❸ Petunias verdes	❹ Claveles amarillos

En algún orden, las cajas sí contienen rosas, lirios, petunias y claveles, también en algún orden sus posibles colores son ocre, blanco, verde y amarillo; sin embargo, hubo algunos errores al colocar las etiquetas, por ejemplo, las rosas no son ocres. De hecho, cada tipo de flor no está dentro ni a la par de la caja con su nombre. Además, el color de la flor tampoco es el que ha sido escrito en la caja con el nombre de la flor ni en cualquier caja al lado de esta. Determinar el verdadero color de cada flor.

Problema 2

Una pulga va saltando entre las gradas de una enorme escalera, las cuales han sido pintadas de verde, azul o rojo. En la figura se muestra el color de las primeras 9 gradas, luego, todo ese bloque de colores se va repitiendo en las gradas que siguen. Al saltar, si la pulga cae en una grada de color verde, luego salta 2 gradas arriba de una vez; mientras que si cae en una grada azul, luego salta 3 gradas arriba de una vez; pero siempre que cae en una grada roja, luego salta a la grada justo abajo de ella. En su primer salto, la pulga cae en la primera grada, determinar el color de la grada en la que cae cuando ha realizado el salto número 2023.

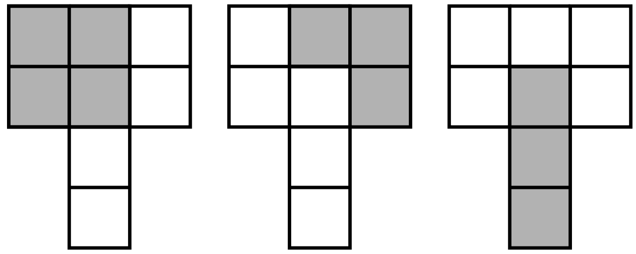


Problema 3

En el planeta *Sincinco* han decidido no utilizar el dígito 5, por lo que cuando listan los números en orden, cada vez que un número contiene un dígito 5 se reemplaza ese número por una cantidad de símbolos 👁, la cual depende de la posición que ocupa. Por ejemplo, al listar los números en orden, cuando aparece el 5 colocan 👁, cuando aparece el 15 colocan 👁 👁 pues es la segunda vez que han reemplazado un número, cuando aparece el 25, colocan 👁 👁 👁 pues es la tercera vez que han reemplazado un número. Determinar cuántos de estos símbolos se utilizan para escribir el 105.

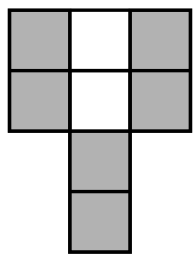
Problema 4

Los números del 1 al 8 se distribuyen en cada una de las casillas de una figura con forma de martillo. Luego, se suman los números de algunas casillas, las cuales han sido sombreadas y se anota el resultado obtenido, como muestra la siguiente figura:



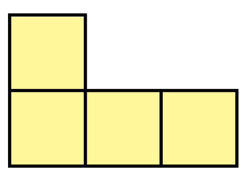
26 11 12

Determinar la suma de los números que se han colocado en las casillas sombreadas de la siguiente figura.



Problema 5

Se tienen 5 piezas de cartón en forma L, como la que se muestra. Dichas piezas están compuestas por cuatro cuadrados de lado 1 *cm*. Si se pegan las 5 piezas sin traslaparse, uniéndolas solo por los bordes, determinar el menor perímetro que se puede obtener y mostrar una configuración de las piezas para lograrlo.



Sexto Grado

Problema 1

Sobre una mesa hay 6 tarjetas enumeradas del 1 a 6. Astrid tomó dos tarjetas, Boris tomó otras dos y Carmen se quedó con las dos restantes. Se sabe que la multiplicación de los números de las tarjetas de Carmen es 12 y que la suma de los números de las tarjetas de Astrid es 9. Determinar el resultado de multiplicar los números de las tarjetas de Boris.

Problema 2

El equipo Pitagóricos F.C. participó en un torneo de fútbol de 22 equipos. Pitagóricos F.C. jugó contra cada uno de los otros equipos y obtuvo un total de 42 puntos. Si en todo el torneo perdió solamente 3 veces, determinar la cantidad de veces que ganó.
Nota: En cada partido, el ganador recibe 3 puntos, el perdedor 0 puntos y en caso de empate, cada equipo recibe 1 punto.

Problema 3

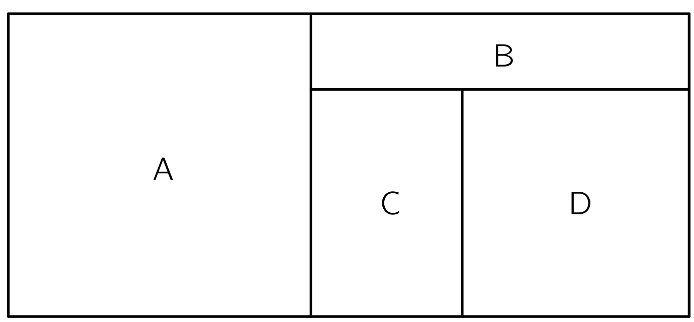
Un terreno rectangular ha sido dividido en 4 parcelas A, B, C y D. Se tiene la siguiente información:

a. A es cuadrada de área 16 m^2.

b. B y C son rectangulares.

c. D es cuadrada con perímetro 12 m.

d. B y D tienen el mismo perímetro.



Calcular el área de todo el terreno.

Problema 4

En un grupo de 23 personas hay honestos, mentirosos y bromistas. Se sabe que los honestos siempre dicen la verdad, los mentirosos siempre mienten y los bromistas alternan entre decir la verdad y mentir. A cada uno se le preguntó: ¿eres honesto?, a lo que 15 de ellos respondieron "sí". Luego, a cada uno se le preguntó: ¿eres bromista?, a lo que 11 de ellos respondieron "sí". Por último, a cada uno se le preguntó: ¿eres mentiroso?, a lo que 8 de ellos respondieron "sí". Determinar la cantidad de honestos del grupo.

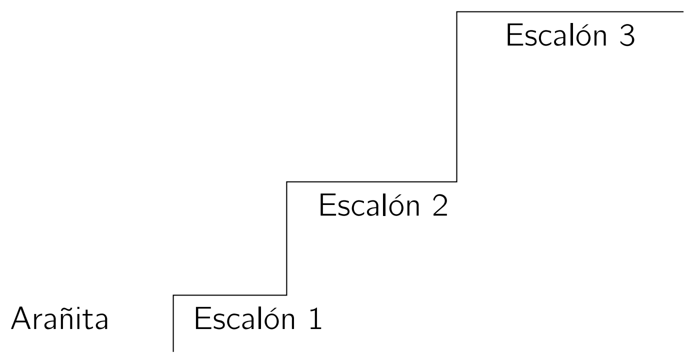
Problema 5

Sea $\overline{abc}$ un número de tres dígitos múltiplo de 3, donde a, b y c son sus cifras. Se forman los números $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ca}$ y se nota que cada uno de ellos tiene solamente dos divisores. Determinar el valor máximo que puede tomar $a + b + c$.

Séptimo Grado

Problema 1

Las *escaleras crecientes* son aquellas donde cada escalón tiene un metro más de alto y ancho que el anterior. Una arañita quiere subir una escalera creciente donde el primer escalón tiene un metro de altura y dos de ancho. Entonces si la arañita quiere recorrer 3 escalones tiene que subir un metro, avanzar 2, subir 2, avanzar 3, subir 3 y avanzar 4, resultando en 15 metros recorridos.



Determinar la cantidad de metros que tendría que recorrer la arañita al subir 2023 escalones de dicha escalera.

Problema 2

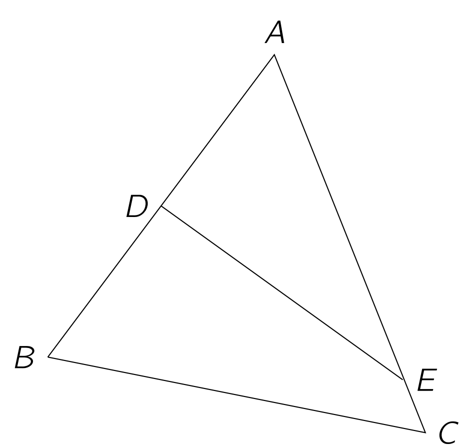
Un pato se encuentra en un tablero de 23×23, cuyas columnas y filas están numeradas en orden del 1 al 23. Inicialmente, el pato se encuentra en la casilla de la fila 12 y columna 12. Un movimiento consiste en desplazarse hacia una casilla vecina, es decir, que comparta un lado con la casilla donde se encuentra. Si el pato se mueve un número par de veces no mayor a 10, determinar la cantidad de casillas donde *no* puede terminar el pato.

Problema 3

Ana, Berta y Carlos están en una carrera. Al inicio, la distancia entre Ana y Berta es la misma que la que hay entre Berta y Carlos. Si cada uno mantiene su misma velocidad, Ana tarda 6 minutos en alcanzar a Berta y Berta tarda 3 minutos en alcanzar a Carlos. Determinar cuánto tiempo tarda Ana en alcanzar a Carlos.

Problema 4

Sea ABC un triángulo, se marca el punto medio D del segmento $\overline{AB}$ y el punto E sobre $\overline{AC}$, tal que $AE = 6EC$. Encontrar la razón entre el área del triángulo ADE y el triángulo ABC.



Problema 5

Alexa tiene un número M de cuatro dígitos. Ella decide voltear el orden de estos y obtiene un nuevo número N de cuatro dígitos; por ejemplo, al voltear 1374 obtenemos 4731. Ella se da cuenta que si suma M y N obtiene un número capicúa de 5 dígitos. Determinar todos los posibles números M que puede tener Alexa al inicio.

Nota: un número capicúa es tal que se puede leer de igual forma en ambas direcciones, por ejemplo, 56765.

Octavo Grado

Problema 1

Ouroboros es una serpiente mitológica que se come a sí misma. Cuando está justo por comenzar a tragarse su cola, su silueta parece una circunferencia de radio R. Luego de un tiempo su silueta parece otra circunferencia, pero de radio $\frac{R}{2023}$. Calcular la razón entre la longitud de la parte del cuerpo de sí misma que ha tragado Ouroboros y su longitud original.

Problema 2

La profesora de octavo grado escribió las siguientes dos sumas en la pizarra, en las cuales a y b son dígitos, pero cubrió el primer sumando de cada una de ellas. Si los dos números cubiertos son iguales y se sabe que son un número entero no necesariamente positivo, determinar el promedio de todos los valores posibles para el resultado de la primera suma.

$$\begin{array}{cc} & \blacksquare \\ + & a\ a \\ \hline = & b\ a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & \blacksquare \\ + & b\ b \\ \hline = & a\ b \end{array}$$

Problema 3

Un número entero positivo es llamado *ultrarrosquita* si al escribirlo en sistema decimal verifica las siguientes condiciones:

a) El primero y el último dígito son sus únicos dígitos iguales.

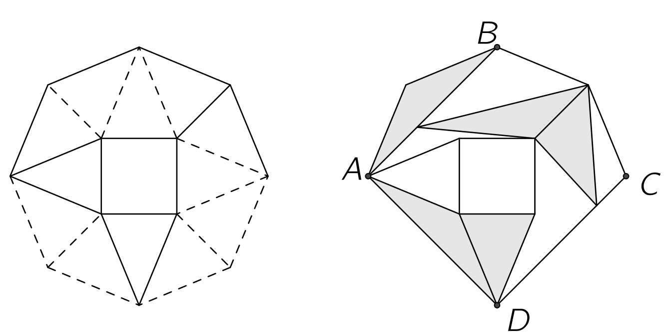
b) Todos los dígitos son diferentes de cero.

c) Uno de sus dígitos es igual a la suma de todos sus otros dígitos.

Determinar cuántos números enteros positivos son ultrarrosquitas y divisibles por 3.

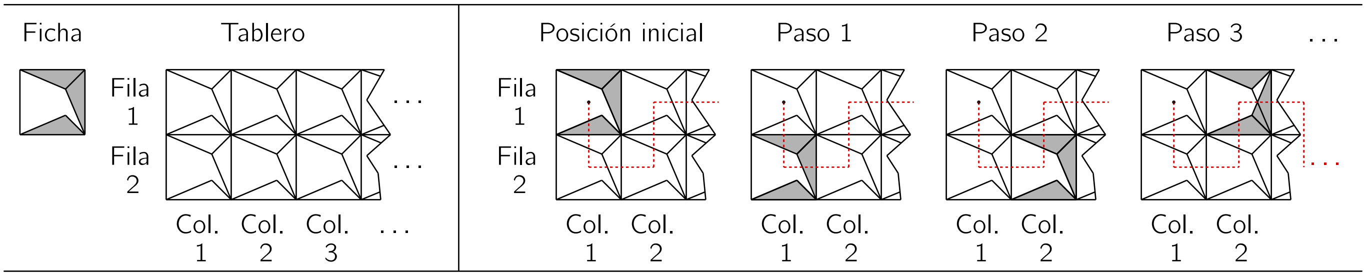
Problema 4

Mía dibuja doce triángulos isósceles idénticos de área 1 cm^2 y forma la figura que se muestra en la imagen a la izquierda, cuyo borde es un polígono regular. Luego, su hermana Zoe borra los segmentos de recta punteados, agrega otros segmentos, incluyendo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y sombrea algunas partes para obtener la figura que se muestra en la imagen a la derecha. Calcular la medida de toda el área sombreada en la figura de la derecha.



Problema 5

Ale tiene una ficha cuadrada de cristal con tres triángulos congruentes visibles desde ambos lados de la ficha y un tablero con dos filas de casillas, todas con igual diseño. En la figura se muestra la posición inicial en que Ale coloca la ficha en el tablero y los primeros movimientos que hace con ella en un recorrido que pasa una vez por cada casilla, cambiando solo de fila o solo de columna en cada paso y sin volver alguna vez a una columna anterior; siempre deslizando la ficha en dos pasos y en el siguiente paso volteando la ficha una vez sobre el borde que comparte con la casilla a seguir (desliza, desliza, voltea, desliza, desliza, voltea y así sucesivamente).



Cuando la ficha pasa por la casilla de la fila m y columna n, Ale anota el número t de triángulos de la ficha que coinciden completamente sobre un triángulo de esa casilla y entonces calcula el número $N(m,n) = 17^t(7^{m-1})(n-1)$. Por ejemplo, en la posición inicial se tiene $t = 3$ y $N(1,1) = 0$, mientras que en el paso 3 la ficha está en la fila 1, columna 2 y $t = 2$, por lo que $N(1,2) = (17^2)(7^0)(1) = 289$. Determinar todas las parejas de números enteros positivos (m,n) tales que $N(m,n) = 2023$.

Nota: Puede suponerse que el tablero tiene tantas columnas como sea necesario.

Noveno Grado

Problema 1

Sea $a_k = 7 \times 171717\ldots17$, donde el segundo factor de este producto se forma escribiendo k veces 17. Determinar el valor de k para el cual la suma de los dígitos de a_k es 2023.

Problema 2

A lo largo del día, Karen sirve la comida varias veces a sus cinco gatos Mishito, Mishi, Mish, Misho y Mishote. En cada comida Karen sirve cuatro platos para cuatro gatos distintos. Mishote come siete veces al día y nadie come tanto como él; por otro lado, Mishito come tres veces al día y nadie come tan poco como él. Determinar la cantidad de veces al día que comen los tres gatos restantes.

Problema 3

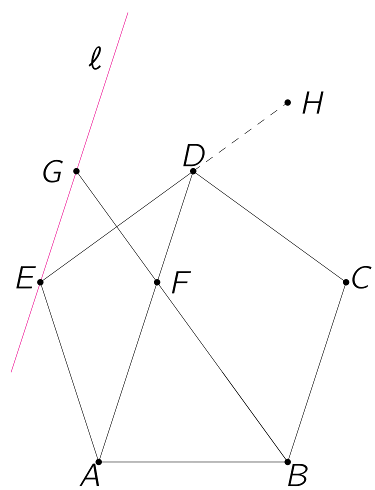
Sean x, y, z números reales distintos de 1 y -1, y sea $k \neq 0$ también un número real, tales que satisfacen las siguientes igualdades:

$$x + y + z = \frac{x+y}{(1-x)(1+y)} = \frac{y+z}{(1-y)(1+z)} = \frac{z+x}{(1-z)(1+x)} = k.$$

Demostrar que $xy + yz + zx = 1$.

Problema 4

En la figura, $ABCDE$ es un pentágono regular. La recta ℓ pasa por E y es paralela a $\overline{BC}$. La bisectriz del ángulo $\angle CBA$ corta a $\overline{AD}$ y a ℓ en F y G, respectivamente. Se define un punto H sobre la prolongación de $\overline{ED}$ de tal forma que $EH = BE$ y D está entre E y H. Demostrar que $BF = GH$.



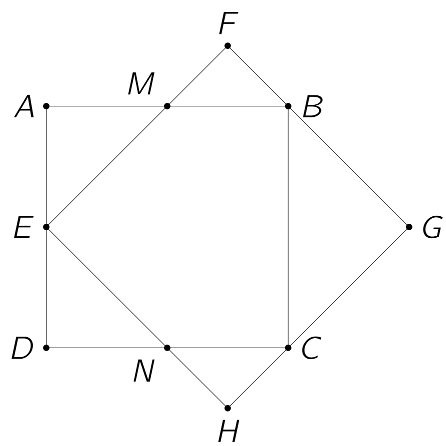
Problema 5

Una caja cerrada tiene altura a y como base un cuadrado de lado b. Encontrar todas las ternas de enteros positivos (a, b, c) tales que el área superficial de la caja es c veces su volumen.

Primer Año de Bachillerato

Problema 1

En la figura, $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados con $AB = 2$ cm. E, M y N son puntos medios de los lados AD, AB y CD respectivamente. Encontrar el área del pentágono $AFGHD$.

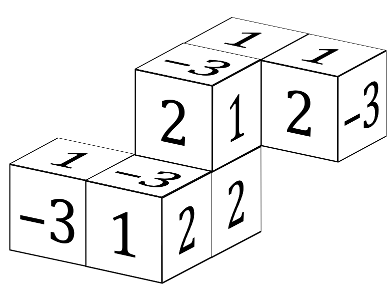


Problema 2

Para cierto entero positivo n que no contiene a 0 como dígito, se define $f(n)$ como el número que resulta de ordenar los dígitos de n en sentido inverso. Por ejemplo: $f(1735) = 5371$, $f(43) = 34$, $f(22) = 22$. Se dice que n es *salsero* si $n > f(n)$ y además, el número $n - f(n)$ resulta de ordenar los dígitos de n en cierta forma. Encontrar todos los números *salseros* menores que 2023.

Problema 3

Alí posee 2023 bloques con forma de cubo, los cuales tienen un número escrito en cada cara, de manera que en todo bloque hay tres caras con los números $1, 2$ y -3, y cada par de caras opuestas poseen números iguales. Alí se dispone a construir una serpiente utilizando estos bloques. Empieza colocando un bloque en el suelo y luego repite el siguiente procedimiento en cada paso: toma un bloque y decide si pegarlo arriba, delante o a la derecha del último bloque colocado, de manera que las caras pegadas contengan números iguales. La figura muestra un ejemplo de cómo pudo haber pegado los primeros 6 bloques.



Alí continúa de esta forma hasta haber utilizado todos los bloques. Cuando la serpiente está terminada, la levanta del suelo y se da cuenta que la suma de los números de todas las caras visibles es 4046. Determinar cuál es la mínima cantidad de veces que se pudieron haber pegado entre sí dos caras con el número -3 en ellas.

Problema 4

Sean a y b enteros positivos tales que $b^2 > 9a$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$. Probar que si $a(a + b)$ es cuadrado perfecto, entonces b es un número compuesto.

Problema 5

El líder supremo del reino de Camelot posee 30 lingotes de oro y decide regalárselos a sus dos hijos Arturo y Morgause. Al no saber ellos cómo repartir los lingotes, el rey propone el siguiente juego: Morgause distribuye los 30 lingotes en tres cajas de manera que cada caja contenga al menos dos lingotes y existan dos cajas tales que una tiene exactamente 6 lingotes más que la otra. Seguidamente Arturo (quien no sabe cuántos lingotes metió Morgause en cada caja), debe de rotular cada caja con un número del 1 al 30, no necesariamente distintos. Sea ℓ el número de lingotes dentro de cierta caja y n el número escrito por Arturo en la misma. Luego, si $n \leq \ell$, entonces Arturo toma n lingotes de esta caja y Morgause se queda con los $\ell - n$ lingotes sobrantes; caso contrario, Morgause toma los ℓ lingotes de la caja. Arturo realiza el procedimiento anterior para cada una de las tres cajas. Determinar el máximo número de lingotes que Arturo puede obtener, independientemente de la distribución inicial hecha por Morgause, y describir cómo puede alcanzar dicho máximo.