XXII Olimpiada Nacional de Matemática

Grados participantes: desde 4º hasta 1er año de bachillerato.

Primera Fase: del 13 al 21 de febrero.

Segunda Fase: 12 de marzo.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XXII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2022.

SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2022. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe deben inscribirse colocando el grado en el que estudian actualmente; pero realizarán la prueba del grado que iniciarán en 2022. Por ejemplo, si actualmente se encuentran estudiando quinto grado, deberán inscribirse en quinto grado y en el sitio de la olimpiada se habilitará la prueba para sexto grado si pertenecen a un colegio del sistema internacional.

Otras consideraciones:

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas. Además, cada página deberá contener su número de correlativo, nombre y apellido completo.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más limpio posible.

- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. **No se aceptarán soluciones a lápiz**. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.
- Las soluciones de cada ejercicio deben ser escaneadas de forma individual, es decir, si el estudiante resuelve los 5 ejercicios, deberá crear 5 archivos. Éstos deberán ser escaneados con la mayor claridad posible y enviarse en formato PDF. Soluciones que no sean legibles serán descalificadas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la vigésima primera Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **13 al 20 de febrero**.
- Completar el formulario de inscripción en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro` a más tardar el **20 de febrero**.
- Unas horas después de haber realizado la inscripción, los estudiantes de **nuevo ingreso** recibirán en el correo electrónico las credenciales (usuario y contraseña) para poder ingresar en el aula virtual: `https://olimpiadas.jovenestalento.edu.sv/`. También puede encontrar estas credenciales ingresando con su cuenta al mismo sitio en el que se inscribió.

  En el caso de los estudiantes de **antiguo ingreso**, recibirán en el correo electrónico las indicaciones para poder ingresar con su cuenta institucional en el aula virtual: `https://olimpiadas.jovenestalento.edu.sv/`. Este proceso puede tomar hasta 24 horas.
- En casos particulares en los que el estudiante no tenga acceso a conexión de Internet o equipo informático adecuado, se dará la oportunidad de entregar la prueba en las oficinas del Programa Jóvenes Talento (PJT) de la Universidad de El Salvador, sede central, occidental y oriental. Es importante aclarar que las soluciones deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, en la oficina se le pedirá que complete un formulario con sus datos personales para anexarlo a su entrega.
- La fecha de entrega de las pruebas en las oficinas del PJT se encuentra descrita a continuación:

  Sede central, en la oficina de administración del edificio del Programa Jóvenes Talento, Universidad de El Salvador (San Salvador) única entrada sobre Autopista Norte en el portón de la Facultad de Odontología, los días lunes 21 y martes 22 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m. y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

  Sede occidental, en el portón peatonal o segundo portón de Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) los días lunes 21 y martes 22 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m. y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

  Sede oriental, en la entrada del edificio del sistema bibliotecario de la Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel) los días lunes 21 y martes 22 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

- A diferencia de años anteriores, este año las pruebas **no se recibirán** en las Direcciones Departamentales de Educación.

REGISTRO

Para hacer efectivo el ingreso de datos, acceder al sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro`. Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono y dirección de correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y nombre.

ACERCA DE LA SEGUNDA FASE:

Las mejores participaciones de cada grado en la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar deberán realizar una segunda prueba el día **sábado 12 de marzo** del presente año. La prueba se administrará a través del aula virtual utilizada durante la primera fase. Para esta prueba es indispensable que los alumnos ingresen a una vídeo llamada y activen su cámara. Pueden utilizar celulares para ingresar a la vídeo llamada y otro dispositivo para realizar la prueba. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez.

La segunda prueba podría llevarse a cabo de manera presencial para los estudiantes con dificultades de conexión a Internet, en función de los lineamientos recomendados por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología para la fecha prevista.

Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en `http://www.jovenestalento.edu.sv` desde el día **martes 8 de marzo de 2022**. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.

La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar

a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Astronomía, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el día **martes 5 de abril de 2022**. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **9 de abril de 2022** con clases desarrolladas bajo la modalidad semipresencial opcional.

Cuarto Grado

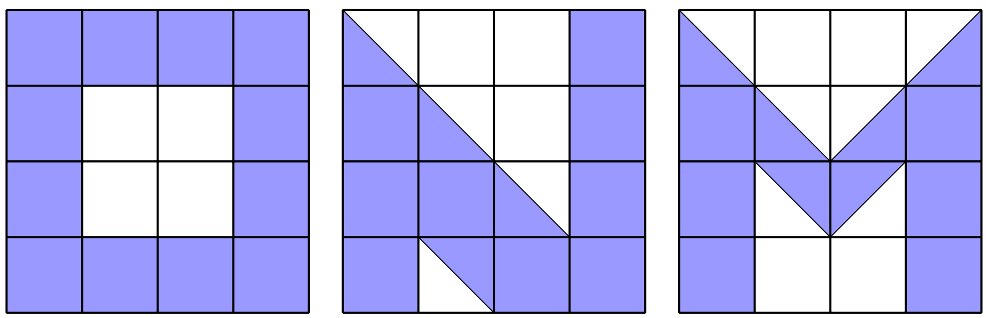
Problema 1

En la siguiente cuadrícula, la suma de los números en cada fila, cada columna y cada diagonal suman 15. Dejando constancia de cada proceso realizado, determinar los valores de A, B, C, D y E.

A	B	C
D	5	3
2	E	4

Problema 2

En la siguiente figura, cada cuadrícula está compuesta por cuadraditos iguales de área 1 y se han construido las siglas ONM. Determinar el valor del área sombreada.

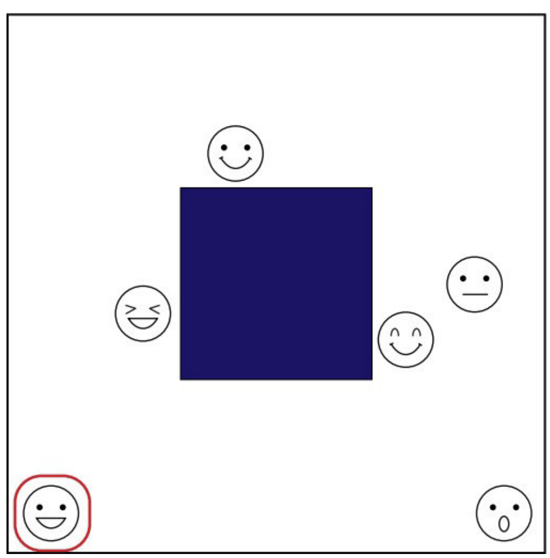


Problema 3

Con tres rectángulos iguales que miden 6 cm de base y 1 cm de altura se hace la siguiente construcción: dos de ellos han sido colocados uno al lado del otro y el tercero se colocó sobre los dos primeros, como se señala en la siguiente figura. Determinar cuánto mide el perímetro de la figura.

Problema 4

Giselle, Helen, Irma, Javier, Kelly y Luna juegan a esconderse en una habitación que tiene una gran columna central en donde la última persona en ser encontrada gana. Helen va a la búsqueda de los demás, pero por el momento no ve a alguien; Luna ve a Giselle y a Kelly; Kelly ve a tres personas; Giselle solo ve a Luna; Irma y Javier se han escondido cerca. A la última persona que Helen encuentra es la que se ha encerrado con rojo. Determinar quién ganó.



Problema 5

Partiendo del número 12345, Riquelmi juega a desordenar sus cifras de acuerdo a los siguientes movimientos:

- Movimiento 1: Toma el número del centro y lo pone en primera posición, obteniendo 31245.
- Movimiento 2: Toma el número del final y lo coloca en la posición central, obteniendo 31524.

A continuación, para el movimiento 3 repite lo que hizo en el movimiento 1, en el movimiento 4 repite lo que hizo en el movimiento 2, en el movimiento 5 repite lo hecho en el movimiento 1 y así sucesivamente.
Cuando llega al movimiento 2022 se detiene. Determinar el número de cinco cifras que se obtiene después de realizar el movimiento 2022.

Quinto Grado

Problema 1

En la siguiente multiplicación, determinar los valores de A y B si el resultado es un número de cuatro cifras.

$$\begin{array}{cccc} & & A & B \\ & \times & B & A \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & \\ \hline * & * & * & * \end{array}$$

Problema 2

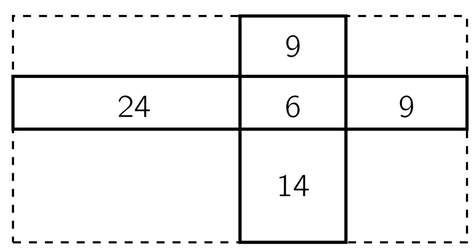
Fernando tiene 12 dulces y su madre le ha prometido que si hace la limpieza, cada día le irá regalando más dulces de la siguiente manera: el primer día le dará $\frac{1}{3}$ de lo que ya tiene, el segundo día le dará $\frac{1}{4}$ de lo que tiene del día anterior, el tercer día le dará $\frac{1}{5}$ de lo que tiene del día anterior y así sucesivamente. Una vez que sobrepasa los 50 dulces, Fernando decide descansar. Determinar la menor cantidad de días que hizo limpieza.

Problema 3

Un caracol se encuentra en la esquina inferior izquierda de una cuadrícula de 50×50 casillas. El caracol se mueve solo de forma horizontal y vertical de la siguiente manera: si avanza de forma vertical, puede solo avanzar 3 casillas a la vez, mientras que si retrocede verticalmente, solo puede hacerlo una sola casilla; por otra parte, si se mueve de forma horizontal, avanza 7 casillas a la vez, mientras que si retrocede horizontalmente, lo hace 2 casillas a la vez. Determinar la menor cantidad de movimientos que debe hacer para llegar a la esquina superior derecha.

Problema 4

Jorge tiene un terreno rectangular, dentro del cual ha construido 5 corrales rectangulares más pequeños y los ha cercado. La siguiente figura muestra una vista desde arriba y los números dentro de cada rectángulo indican el perímetro de cada corral, en metros. Jorge quiere reubicar las cercas para hacer un solo corral rectangular con todo el terreno. Determinar cuánto le falta o le sobra de las cercas para armar el corral rectangular.



Problema 5

Alexander, Beatriz, Christopher y David compiten en una carrera en bicicleta. Al inicio, Alexander va en primer lugar, Beatriz va en segundo lugar, Christopher va en tercer lugar y David va de último. Al finalizar la carrera se tiene la siguiente información:

(a) Alexander y Beatriz se sobrepasaron 3 veces.

(b) Alexander y Christopher se sobrepasaron 6 veces.

(c) Christopher y David se sobrepasaron 9 veces.

(d) Alexander y David se sobrepasaron 5 veces.

Determinar en qué lugar quedó cada uno al final de la carrera.

Sexto Grado

Problema 1

Hace un tiempo, un montañista intentó llegar a la cima de una montaña de 7200 metros de altura pero solo llegó a $\frac{4}{9}$ de ella. Luego, cada mes volvía a escalar y cada vez lograba alcanzar 90 metros más alto que el mes anterior, pero debido al calentamiento global la montaña disminuye 10 metros de altura cada mes. Calcular la cantidad de veces que tuvo que escalar para llegar a la parte más alta de la montaña.

Problema 2

En una empresa, el gerente observa los horarios de trabajo y descanso de tres nuevos empleados que iniciarán labores a la misma hora. Sus turnos están distribuidos de la siguiente forma: el primer empleado siempre trabaja turnos de 12 horas, seguidos de descansos de 8 horas; el segundo empleado trabaja turnos de 12 horas y descansos de 12; y el tercer empleado trabaja turnos de 6 horas y descansos de 12. En un momento determinado, los tres empleados iniciarán simultáneamente un turno de descanso, calcular la cantidad de turnos de trabajo que hizo cada uno hasta ese momento.

Problema 3

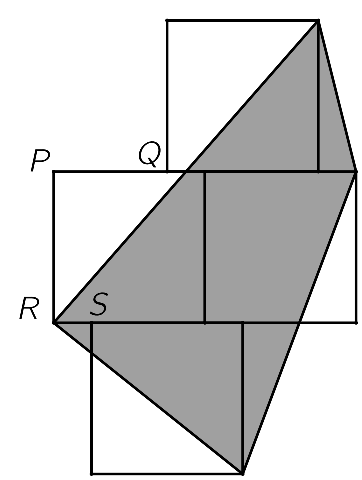
Menelao, Napoleón, Odilio y Paulo son cuatro amigos que se conocen desde la infancia. Al hablar sobre las fechas de sus nacimientos, notan que todos nacieron en el mes de enero pero en distintos años, y cada uno dice lo siguiente:

- Menelao: yo nací en un año que es múltiplo de 3.
- Napoleón: cuando Odilio nació, yo estaba cumpliendo un año.
- Odilio: yo soy mayor que Menelao pero menor que Paulo.
- Paulo: yo nací un año después de un número primo.

Sabiendo que todos nacieron después del 2000 y antes del 2010, determinar la edad de cada uno de ellos el día en que se ha publicado la ONM 2022.

Problema 4

Se construyen cuatro cuadrados de lado 8 cm como muestra la figura. Si $PQ = 6\ cm$ y $RS = 2\ cm$, determinar el valor del área sombreada.



Problema 5

En una cuadrícula de 3×3 se ubican los números del 1 al 9, un número por casilla. Se calculan las sumas de los números de cada cuadrícula de 2×2 y por último la suma de los cuatro números de las cuatro esquinas. Si en las cinco sumas realizadas se obtiene el mismo resultado, determinar el máximo valor posible del producto de tres números que estén sobre una misma columna.

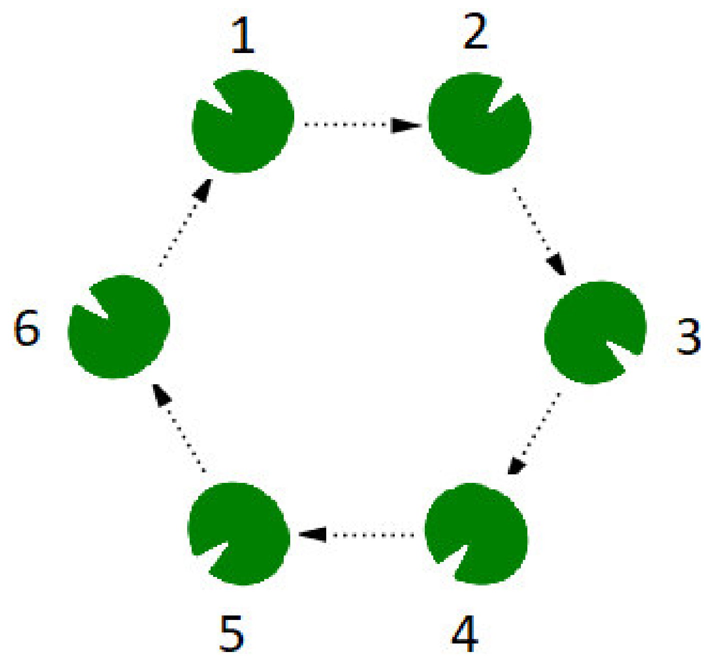
Séptimo Grado

Problema 1

Una rana vive en un estanque como se muestra en la figura y para cazar su alimento salta de la siguiente forma:

- Siempre caza en los nenúfares, saltando en sentido de las agujas del reloj.
- Cada día cambia de nenúfar: si un determinado día se encuentra en un nenúfar con número impar, la rana dará un salto y si se encuentra en un nenúfar con un número par, dará tres saltos.

Al inicio, la rana se encuentra en el nenúfar 1 y después de varios saltos la rana se ha tomado un descanso. Si la mitad de días que saltó más 2022 días es igual a dos tercios de los días que saltó, determinar en qué nenúfar se encuentra descansando la rana.



Problema 2

El dueño de un hotel es supersticioso y piensa que el número 7 es de mala suerte, por ello ordena que todas las habitaciones del hotel estén numeradas omitiendo todos aquellos números que incluyan el 7 dentro de sus dígitos. El hotel tiene un total de 730 habitaciones. Determinar el número más grande de habitación si se enumeran iniciando del 1 y en forma ascendente.

Problema 3

Carla ha olvidado la contraseña de su teléfono, pero recuerda que es un número de cuatro cifras que cumple lo siguiente:

- Es último dígito es un número primo impar.
- La primera y tercera cifra son iguales.
- Ninguno de los dígitos es cero.
- La suma de los dígitos es 16.

Además, ella recuerda que su contraseña es el menor número con dichas características, determinar la contraseña de Carla.

Problema 4

Miguel ha comprado bolsas de harina de diferentes tamaños: pequeñas, medianas y grandes, de las cuales 3 son grandes y 3 son pequeñas. Luego de regalar las bolsas grandes, le queda el 65 % del total de harina original y después de una cena familiar, donde cocina las bolsas pequeñas, se da cuenta que solo le queda $\frac{8}{13}$ de la harina restante. Determinar la cantidad de bolsas medianas que tiene Miguel.

Problema 5

Diez equipos participan en un torneo llamado "Olimpo". El torneo consiste de dos rondas. Una ronda es una serie de encuentros en los que cada equipo se enfrenta a cada uno de los demás equipos exactamente una vez. Después de la primera ronda, todos los equipos obtuvieron puntajes diferentes. Luego de la segunda ronda, la cantidad de puntos de todos los equipos es la misma. Si un equipo recibe 2 puntos al ganar un encuentro, 1 punto al empatar y 0 al perder, determinar si es posible que existan dos equipos A y B tales que A gana a B en la primer ronda y B gane a A en la segunda ronda.

Octavo Grado

Problema 1

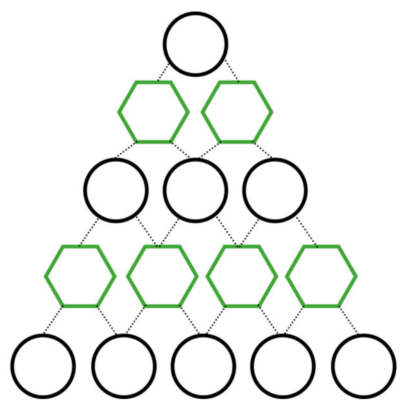
Carlos dispone de tres tableros: el tablero A con dimensiones 18×10, el tablero B con dimensiones 17×16 y el tablero C con dimensiones 16×10.
Diana posee muchas piezas idénticas, formadas por casillas de lado 1, con ceros o unos escritos en cada casilla, tal y como se muestra en la figura.

1	0	0	0
1	1	1	1

Carlos reta a Diana a elegir uno de los tableros y cubrirlo completamente con las piezas que ella posee sin que las piezas se sobrepongan. Si lo logra, ella obtendrá una suma de dinero en dólares, igual a la cantidad total de unos que se logren contar en todo el tablero.
¿Cuál tablero le conviene elegir a Diana para ganar más dinero?

Problema 2

La siguiente figura se completa colocando números enteros en cada casilla. Si el número está en una casilla con forma de círculo, este se obtiene restando los dos números en las casillas que están justo debajo. Si el número está en una casilla con forma de hexágono se obtiene sumando los dos números en las casillas que están justo debajo.

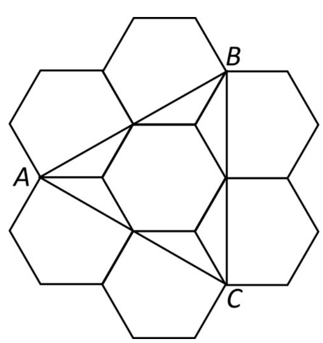


Piso 1

Se escriben los 5 números del piso 1 de modo que los dos números de los extremos son impares. Demostrar que el número escrito en la casilla superior siempre es par.

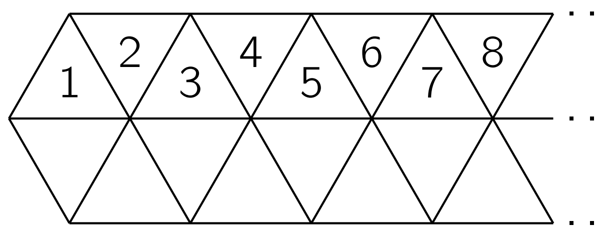
Problema 3

En la siguiente figura el área de cada hexágono es 12. Calcular el área de ΔABC.



Problema 4

Con 4044 galletas en forma de triángulos equiláteros de lado 1, Mynor dispone colocarlas de una manera peculiar que consta de dos filas con la misma cantidad de galletas. Las que están en la fila superior las numera del 1 hasta el 2022, como se muestra en la figura:



Mynor se come todas aquellas galletas de la fila superior que ocupan la posición $6n+4$, con $n \neq 0$, es decir, las que están en las posiciones 10, 16, 22,. . ., 2020.
Cuando Mynor termina de comerse las galletas, ¿cuál es el perímetro de la nueva figura?

Problema 5

Una hormiga ha depositado terrones de azúcar en un tablero de 5×5. Comenzando por la casilla C_1, coloca cantidades consecutivas de forma ordenada hasta llegar a la casilla C_{25}. Para obtener su comida de un día, la hormiga selecciona siempre 5 casillas, de modo que todas ellas estén en filas y columnas diferentes.
Sea $t \geq 2022$ el número de terrones que come la hormiga cada día. Encontrar el menor valor que puede tomar t y escribir un posible arreglo del tablero.

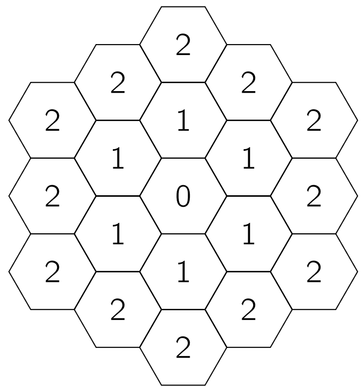
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}	C_{20}
C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}

Nota: La hormiga come la misma cantidad de terrones todos los días.

Noveno Grado

Problema 1

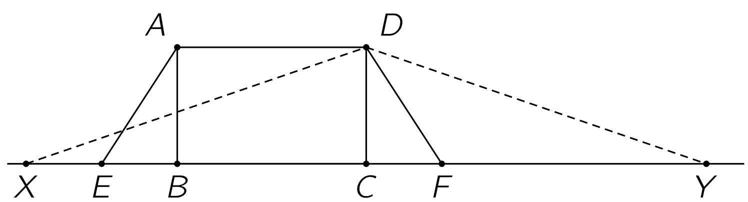
Se forma un arreglo iniciando con un hexágono de lado 1 cm numerado con 0. En un siguiente paso se construyen 6 hexágonos regulares alrededor del hexágono inicial. En el paso n se construyen hexágonos regulares alrededor del borde de la figura del paso $n-1$. Por ejemplo, para $n=2$ la figura es



Encontrar el perímetro de la figura construida en el paso 2022.

Problema 2

En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, E es punto medio de $\overline{BX}$ y F es punto medio de $\overline{BY}$. Si $\overline{AE}=\overline{DF}$, mostrar que $\overline{DX}=\overline{DY}$.



Problema 3

Ronaldo escribe los números 1, 2, 3, ..., 70 en una pizarra y reta a su amiga Katy a borrar algunos de ellos, de tal forma que la suma de cualesquiera dos que hayan quedado en la pizarra no sea un múltiplo de 7. ¿Cuál es la cantidad mínima de números que debe borrar Katy para poder cumplir el reto?

Problema 4

Partiendo de una tripleta de números naturales, se realiza repetidamente la siguiente operación: se escoge uno de los tres números y se suma a los restantes. Por ejemplo,

$$(1,2,3) \longmapsto (4,5,3) \longmapsto (4,9,7),$$

donde los números elegidos fueron 3 y 4, respectivamente. Si partimos de $(2,3,7)$, ¿será posible obtener $(2020,2021,2022)$ mediante la operación descrita?

Problema 5

Encontrar el mayor número primo p tal que la siguiente suma es un número entero:

$$\frac{2022}{p(p+1)}+\frac{2022}{(p+1)(p+2)}+\frac{2022}{(p+2)(p+3)}+\ldots+\frac{2022}{(2021)(2022)}.$$

Primer Año de Bachillerato

Problema 1

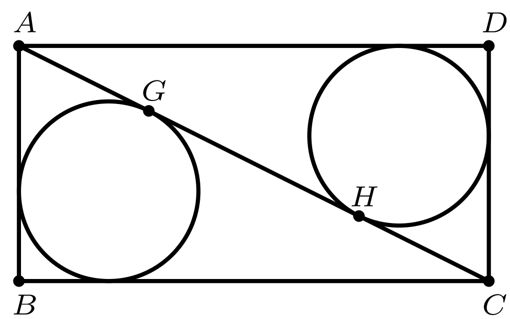
Ana está pensando en dos números a, b y Beto trata de adivinarlos. Beto pide una pista y Ana le dice: "Con solo saber que cumplen

$$a^2 + a = b^2 + 3b + 2$$

podrás determinarlos". Luego de oír la pista Beto logra deducir los valores de a y b. Determinar estos valores.

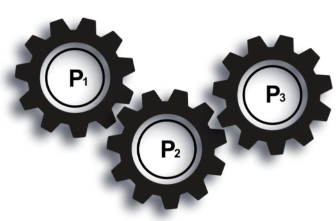
Problema 2

En la siguiente figura los círculos son de radio 1 cm y $GH = 5$ cm. Determinar la longitud de los lados del rectángulo.



Problema 3

Se tienen tres engranajes en la posición mostrada en la figura. Se sabe que tienen perímetro entero P_1, P_2 y P_3 (de izquierda a derecha) y que si se le da una vuelta completa al primero, luego una vuelta completa al segundo y finalmente una vuelta completa al tercero (todas en sentido horario), los tres engranajes quedan en su posición original. Determinar los posibles valores de (P_1, P_2, P_3).



Problema 4

En un recipiente con forma de pirámide regular de base cuadrada se colocan 120 cm^3 de agua. Si la pirámide se coloca con la base en el suelo, el agua cubre hasta 5 cm de altura y si se coloca al revés, el agua cubre 10 cm de altura. Determinar el lado de la base y la altura del recipiente.

Problema 5

Una rana se encuentra en el origen del plano. En el segundo k, la rana decide hacia qué dirección caminar (arriba, abajo, izquierda o derecha) y camina k^2 unidades. Probar que

(a) La rana puede llegar a $(4, 0)$ y a $(4, 4)$.

(b) Hay un camino que la rana puede tomar para pasar por todos los puntos de la forma $(4a, 4b)$ con a, b enteros.

(c) La rana puede llegar a cualquier punto de coordenadas enteras del plano.