**XXI Olimpiada Nacional de Matemática**

Grados participantes: desde 4.° hasta 1.[er] año de bachillerato.

Primera Fase: del 14 al 22 de febrero.

Segunda Fase: 13 de marzo.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

**EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XXI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2021.**

## SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2021. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe que hacen cambio de grado escolar a medio año deben registrarse y realizar la prueba del grado que iniciarán en 2021. Por ejemplo, si actualmente están en quinto grado y a medio año inician sexto, deben realizar el proceso como si estuvieran en sexto grado.

Otras consideraciones:

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas y numeradas. Además, cada página deberá contener su número de correlativo, nombre y apellido completo.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente. Asimismo, se evaluarán soluciones parciales a los problemas, por lo cual se invita a los participantes a enviar todo su trabajo.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más limpio posible, usando bolígrafo o pluma. **No se aceptarán soluciones a lápiz**.

- Todas las participaciones con evidencia de fraude serán anuladas.

## REGISTRO y PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la vigésima primera Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **14 al 21 de febrero**.
- Registrar sus datos personales en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro` a más tardar el **21 de febrero**.
- Luego de completar la inscripción, recibirá en su correo institucional (antiguo ingreso) o en la dirección de correo electrónico que utilizó para inscribirse (nuevo ingreso), un mensaje con las **credenciales** (**usuario y contraseña**) para poder ingresar en la plataforma Moodle (aula virtual) donde subirá las resoluciones de sus problemas.
- Este correo le será enviado dentro de las 24 horas posteriores a su inscripción. Por favor revise su carpeta de spam, en caso de que el correo aparezca ahí. Por otro lado, la forma más fácil de obtener la información de ingreso al aula virtual es regresando al **sitio de registro de la olimpiada** e ingresando con el mismo correo con el que se realizó la inscripción. Ahí aparecerán las credenciales y la dirección del sitio web para ingresar al sitio de las olimpiadas nacionales, cuando ya estén listas.
- Las pruebas deberán ser enviadas de forma digital a más tardar el día martes 23 de febrero 2021 a las 11:59 p.m. Para ello, los estudiantes tendrán que acceder al sitio `www.olimpiadas.jovenestalento.edu.sv/` utilizando las credenciales enviadas a su correo o disponibles en el sitio de registro.
- Las soluciones deberán ser escaneadas y presentadas en formato PDF. Las imágenes correspondientes a un mismo problema deberán ser almacenadas en un solo archivo. Luego, si el estudiante resuelve los 5 problemas deberá presentar 5 archivos.
- Como alternativa al equipo de escáner, pueden utilizarse aplicaciones de smartphone para escanear y compartir documentos, tales y como: CamScanner, Adobe Scan, PDF Scanner, etc.
- En casos particulares en los que, de acuerdo al formulario de inscripción, el estudiante no tenga acceso a conexión de internet o equipos informáticos adecuados, se recibirán participaciones en papel en las oficinas del Programa Jóvenes Talento (PJT) de la Universidad de El Salvador, tal como se detalla a continuación:
  - **Sede central**, en el portón de la Facultad de Odontología, Universidad de El Salvador (San Salvador) sobre Autopista Norte, los días lunes 22 y martes 23 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

- **Sede occidental**, en el portón de Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) los días lunes 22 y martes 23 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m. y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.
- **Sede oriental**, en la entrada del edificio del sistema bibliotecario de la Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel) los días lunes 22 y martes 23 de febrero en horario de 9:00 a.m. a 12:00 m y de 1:00 p.m. a 3:00 p.m.

*Aclaración: las soluciones deben ser enviadas en papel solo para estos casos excepcionales.* Se requiere entregar dichas soluciones dentro de un sobre manila. En el sistema de registro habrá un enlace en donde podrán descargar el comprobante de registro y deberán imprimir dos copias. Una copia deberá ser colocada como carátula del sobre manila, y la otra copia servirá como constancia del material recibido; esta será sellada y firmada por la persona responsable del PJT que reciba la prueba.

- A diferencia de años anteriores, este año las pruebas **no se recibirán** en las Direcciones Departamentales de Educación.

## ACERCA DE LA SEGUNDA FASE:

Las mejores participaciones de cada grado en la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar deberán realizar una segunda prueba el día **sábado 13 de marzo** del presente año. La prueba se administrará a través del aula virtual utilizada durante la primera fase. Para esta prueba es indispensable que los alumnos ingresen a una vídeo llamada y activen su cámara. Pueden utilizar celulares para ingresar a la vídeo llamada y otro dispositivo para realizar la prueba. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez.
La segunda prueba podría llevarse a cabo de manera presencial para los estudiantes con dificultades de conexión a internet, en función de los lineamientos recomendados por el Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología para la fecha prevista.
Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en `http://www.jovenestalento.edu.sv` desde el día **martes 9 de marzo de 2021**. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar.

## INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

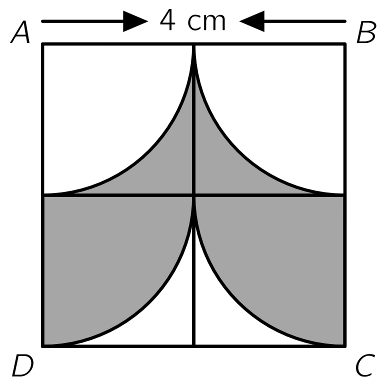
Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de**

**El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física, Química e Informática.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el día **martes 7 de abril de 2021**. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **10 de abril de 2021** con clases desarrolladas de forma virtual.

# Cuarto Grado

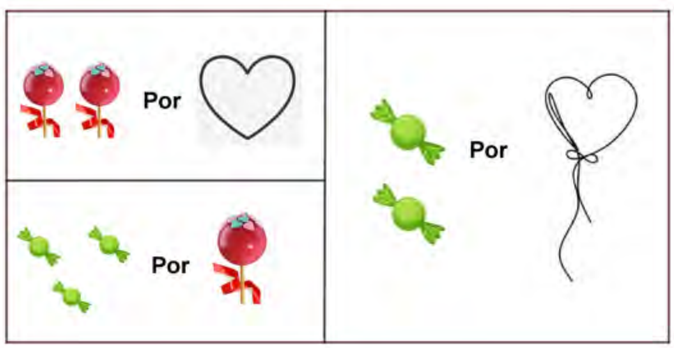
## Problema 1

Determinar el área de la figura sombreada al interior del cuadrado $ABCD$.




## Problema 2

La maestra de cuarto grado ha creado un juego para el día de San Valentín, cada niño ha logrado recolectar tarjetitas de bombones y dulces que pueden intercambiar por regalos para sus compañeros, según la imagen mostrada.




Lucía cambió todas sus tarjetas por 6 corazones, pero luego decide cambiarlos por globos. Determinar cuántos globos tendrá Lucía una vez haya realizado los cambios.

## Problema 3

Para celebrar el día de la amistad, las hormiguitas fueron a recoger algunos presentes para compartir. Como el camino era muy largo, decidieron descansar. La hormiguita que lleva la flor se puso a descansar al dar el pasito 66, la hormiguita que lleva fruta descansó a los 24 pasitos y la hormiguita que lleva la hojita descansó justo a la mitad de pasitos que hay entre las otras dos. Determinar a los cuántos pasitos de haber iniciado el recorrido descansó la hormiguita que lleva la hojita.

## Problema 4

Reconstruir la multiplicación para encontrar los números faltantes de cada cuadrito y calcular la suma de los dígitos del producto.

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & \square & \square & \times & \square\ 7 \\ \hline & \square & \square & 8 & 2 & \\ 1 & 2 & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \end{array}$$

## Problema 5

Se forman figuras con cuadrados de 1 cm de lado, el perímetro de la figura 1 es 16 cm y el perímetro de la figura 2 es 18 cm. Determinar el perímetro de la figura formada con 2021 cuadrados.

*Figura* **1**

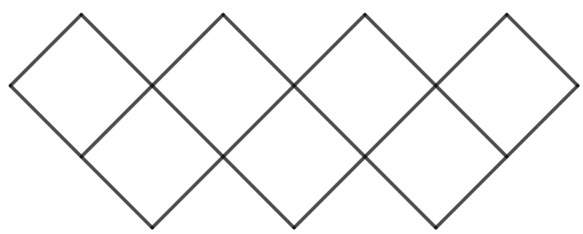
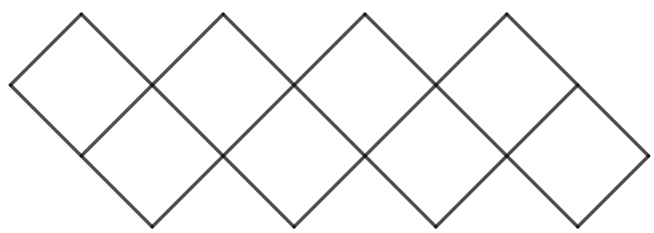


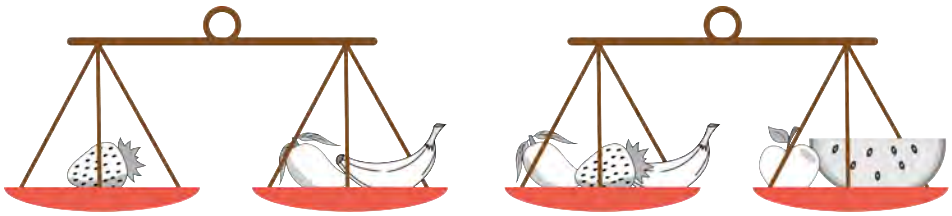
*Figura* **2**



# Quinto Grado

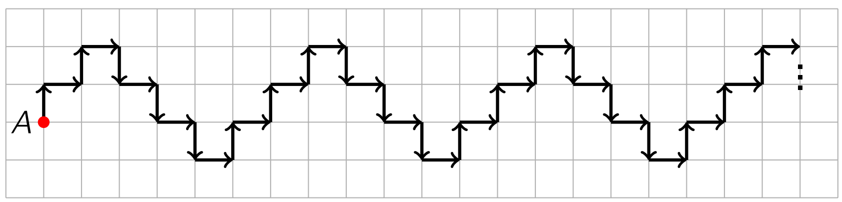
## Problema 1

Una fresa, un mango, un guineo, una manzana y un trozo de sandía se pesan en una balanza, como muestra la figura. Si la fresa pesa 10 gramos, ¿cuánto pesan los 5 alimentos juntos?



## Problema 2

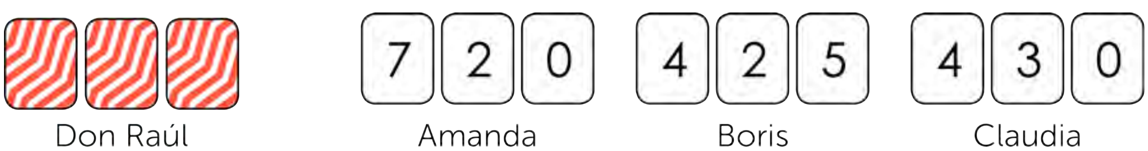
Una hormiga parte del punto $A$ y sigue la trayectoria que muestra la figura.




Se sabe que para llegar de un punto a otro tarda un minuto. Determinar hacia qué dirección camina la hormiga en el minuto 2021.

## Problema 3

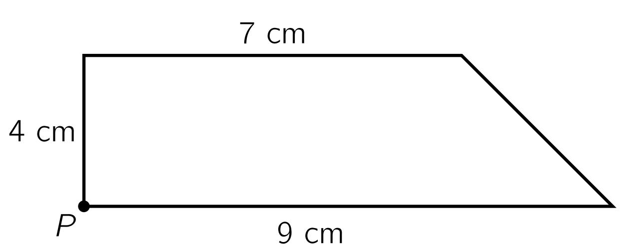
Don Raúl, el profesor de Amanda, Boris y Claudia, formó un número de tres cifras con unas cartas numeradas que tenía y las colocó boca abajo. Luego, les pidió que intentaran adivinar cuál era el número, formando el número también con cartas. Ellos formaron lo siguiente:




El profesor les respondió que cada uno había acertado únicamente con la posición y número de una carta. Determinar el número que pensó el profesor.

## Problema 4

Alberto tiene un trozo de papel en forma de trapecio rectangular, con las medidas que muestra la siguiente figura:



Luego, quiere doblarlo de modo que el doblez sea paralelo al lado que mide 4 cm y además, el área de las dos figuras en que quede dividido, midan lo mismo. Determinar a qué distancia del vértice $P$ debe realizar el doblez Alberto.

## Problema 5

Juan multiplicó un número $M$ por 84 y escribió el resultado en un trozo de cartulina, cubriendo las cifras de unidades de millar y decenas de millar, como muestra la imagen. Luego, pidió a María que encontrara los últimos tres números que resultan de multiplicar $M$ por 12. Determinar cuáles son esos tres números.

$$\boxed{\square \quad \square \quad 8 \quad 3 \quad 6}$$

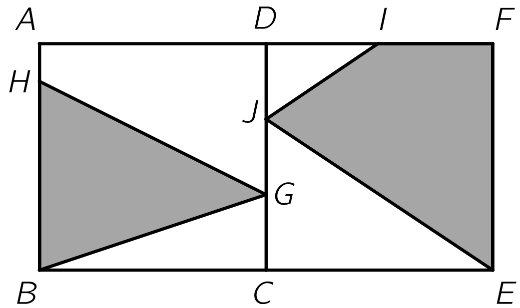
# Sexto Grado

## Problema 1

Ana, Beatriz y Claudia tienen 75 dulces entre las tres. Si Ana le da 13 dulces a Beatriz, Beatriz le da 11 dulces a Claudia y Claudia le da 7 dulces a Ana, todas quedan con la misma cantidad de dulces. Determinar quién tenía menos dulces al principio.

## Problema 2

$ABCD$ y $CDFE$ son cuadrados de lado 3. $I$ es punto medio de $\overline{DF}$, $6AH = AB$ y $DJ = JG = GC$. Calcular el cociente del área total del cuadrilátero $ABEF$ entre el área sombreada.




## Problema 3

Determinar todos los números de 4 cifras de la forma $\overline{abca}$ tales que son múltiplos de 3 y satisfacen que la diferencia de los números de dos cifras $\overline{bc} - \overline{aa} = 11$.
*Nota:* $\overline{abca}$ es un número de cuatro dígitos, $\overline{bc}$ y $\overline{aa}$ son dos números de dos dígitos.

## Problema 4

Adrián, Benjamín, Carlos y Daniel trabajan en el mismo hospital. Cada uno de ellos es doctor y tiene una de las siguientes especialidades: alergista, bacteriólogo, cardiólogo ó dermatólogo, no necesariamente en ese orden. Además, se conoce que:

a) Daniel ha sido paciente del alergista.

b) El cardiólogo es amigo de Benjamín, pero ninguno ha sido paciente del otro.

c) El dermatólogo ha tenido como paciente a Daniel.

d) Ni Adrián ni el dermatólogo conocen a Carlos.

Determinar quién es el alergista.

## Problema 5

Se ubican los números naturales iniciando desde el número 3, de la forma mostrada en la imagen siguiente:

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 3 | | | | | |
| $F_2$ | 4 | 5 | | | | |
| $F_3$ | 6 | 7 | 8 | | | |
| $F_4$ | 9 | 10 | 11 | 12 | | |
| $F_5$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |
| $\vdots$ | | | | | | |

Determinar la fila y columna donde se ubica el número 2021.

# Séptimo Grado

## Problema 1

Se tiene la siguiente figura:

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ | $C_8$ | $C_9$ | $C_{10}$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{14}$ | $C_{15}$ | $C_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | $X$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| $F_2$ | | | $X$ | | | | | | | | | | | | | |
| $F_3$ | | | | | | $X$ | | | | | | | | | | |
| $F_4$ | | | | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| $F_5$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

a) Determinar la posición que se debe marcar en la quinta fila.

b) Si la cuadrícula se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia abajo, determinar la posición marcada en la fila 100.

## Problema 2

Encontrar el número más pequeño de 3 cifras que es múltiplo de 3 pero no de 9, es múltiplo de 5 pero no de 25 y solo posee 8 divisores, todos ellos impares.

## Problema 3

Lito tiene 6 cajas cúbicas de lado entero, 3 son verdes y tienen el mismo tamaño, mientras que las otras 3 son azules, del mismo tamaño entre ellas, pero más pequeñas que las de color verde. Jugando con ellas, decide apilarlas para hacer una torre y observa que la altura de esta es de 21 centímetros. Además, el volumen total de las 6 cajas es de 273 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones de cada caja.

## Problema 4

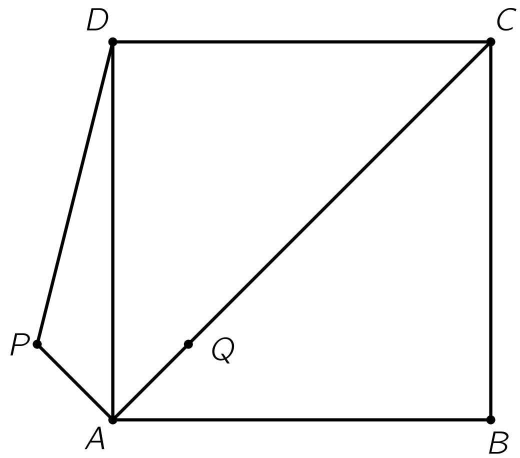
En cierta ciudad, las bicicletas que usan los panaderos generalmente son armadas con la siguiente configuración de ruedas: la rueda trasera tiene 52 cm de diámetro, mientras que la delantera tiene 40 cm de diámetro. A una de estas bicicletas se le hacen marcas en los puntos de contacto con el piso y se le hace avanzar hacia adelante, en línea recta.

a) Determinar el mínimo de vueltas que debe dar la rueda trasera para que ambas ruedas vuelvan a estar como al principio.

b) Determinar cuántas vueltas ha completado la rueda delantera, cuando la rueda trasera haya dado exactamente 2021 vueltas.

## Problema 5

En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 5 cm. El área del triángulo $ADP$ es $\frac{5}{2}$ cm$^2$ y el punto $Q$ es el simétrico del punto $P$ respecto del segmento $\overline{AD}$. Determinar el área del triángulo $BCQ$.



# Octavo Grado

## Problema 1

Se tiene un triángulo equilátero $ABC$, donde $M$ es el punto medio del lado $\overline{AC}$, $Q$ es el punto medio de la altura $\overline{BM}$; $P$ y $R$ son puntos sobre $\overline{BC}$ ( $P$ entre $B$ y $R$). Además, el triángulo $QPR$ es isósceles y recto en $P$. Encontrar la medida del $\angle MQR$.

## Problema 2

Se ha construido un recipiente sellado, que contiene agua, uniendo dos prismas rectos de base cuadrada, uno con base de 1 cm de lado y el otro cuya base es de 3 cm de lado. Cuando el recipiente está boca arriba, la altura del agua en el interior es de 20 cm (como se muestra en la Figura A). Cuando la botella está boca abajo, la altura del líquido es de 28 cm (como se muestra en la Figura B).
Determinar la altura total, en cm, de la botella.

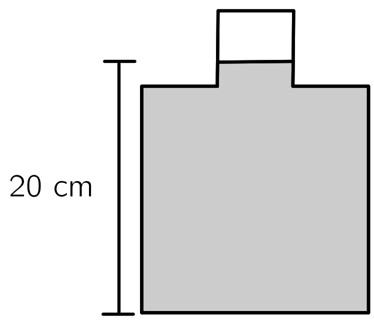



Figura A

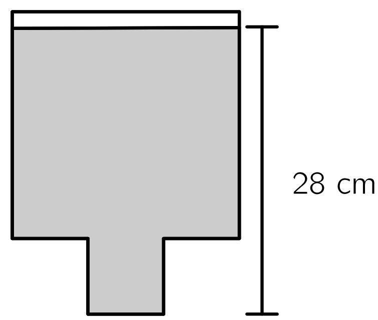



Figura B

## Problema 3

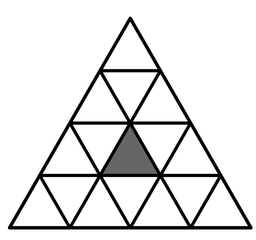
Se organizó un torneo con 6 equipos, cada uno de los cuales jugó con los restantes exactamente una vez. Un equipo obtiene 3 puntos por una victoria, 1 punto por un empate y 0 por una derrota. Después del torneo, la suma de las puntuaciones de todos los equipos es 41. Demostrar que al menos 4 equipos han empatado en el torneo.

## Problema 4

Una pulga está sobre el origen del plano cartesiano y puede saltar a puntos de este que tienen coordenadas enteras. En cada salto elige uno de los siguientes movimientos:
De $(x, y)$ salta a $(x, y+5)$.
De $(x, y)$ salta a $(x-2, y-3)$.
De $(x, y)$ salta a $(x+4, y-9)$.
Usando estos movimientos, determinar cuántos caminos puede seguir la pulga para ir del punto $(0,0)$ hasta el punto $(0,2021)$.

## Problema 5

Alfonso y Diana están jugando un juego, comenzando con la siguiente figura geométrica:



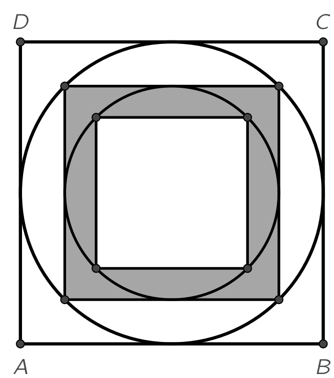
Un movimiento del juego consiste en cortar en dos partes la figura sobre una de las líneas rectas. Cada uno realiza un movimiento en forma alternada, siendo el ganador el jugador que al final recibe solo el triángulo sombreado. Alfonso comienza el juego. Determinar si existe una estrategia que permita a Alfonso asegurar la victoria.

# Noveno Grado

## Problema 1
Determinar si es posible colocar los números del 1 al 9 en un círculo de manera que la suma de cualesquiera 3 elementos consecutivos sea la misma.

## Problema 2
Ana y Beto, dos corredores sobrehumanos, hacen una carrera desde una ciudad A hacia otra B que están a 450 km de distancia. Ana debe descansar 5 minutos después de cada 3 km recorridos, mientras Beto debe descansar 5 minutos después de cada 5 km recorridos. Además, se sabe que Beto corre a 5/11 de la velocidad de Ana. Si ambos corredores empataron, determinar cuánto tiempo duró la carrera.

## Problema 3
Si el área de la región sombreada es 1 en la siguiente figura, determinar el área del cuadrado $ABCD$.




## Problema 4
2021 samuráis están parados alrededor de un círculo. En todas las rondas, cada uno de los samurái debe decidir si atacar hacia su izquierda o hacia su derecha. Si dos samuráis se atacan mutuamente, sus ataques se bloquean entre sí. Si un samurái no es capaz de bloquear todos los ataques dirigidos hacia él, sale del juego. Después de cada ronda los samurái restantes vuelven a formarse en un círculo. Determinar si es posible que después de cierto número de rondas queden 1009 samuráis en el círculo.

## Problema 5
Armando tiene varias baldosas en forma de triángulos equiláteros y pentágonos regulares, todas de lado 1. Armando comienza a pegarlas por los lados hasta terminar con una figura en forma de anillo, cuyo borde exterior es un polígono convexo tal que no tiene dos lados que pertenezcan a la misma baldosa. Determinar la mayor cantidad de lados que puede tener este polígono.

# Primer Año de Bachillerato

## Problema 1
Un grupo de mecánicos ha inspeccionado un lote de vehículos viejos, y juntos determinaron que 45 de estos tienen problemas en el motor, 30 tienen fallas eléctricas y 35 tienen fuga de aceite. Da la casualidad que hay exactamente 10 vehículos que tienen problemas en el motor y fallas eléctricas, 10 con problemas en el motor y fuga de aceite, y 10 con fallas eléctricas y fugas en el motor. Sin embargo, de todos los vehículos, solo dos tienen los tres defectos a la vez, mientras que los últimos 18 vehículos están en perfecto estado. Determinar cuántos autos en total hay en dicho lote.

## Problema 2
Un número se dice *cuatroamigo* cuando él y todos los números que se obtienen al reordenar sus dígitos en cualquier orden son múltiplos de 4. Determinar cuántos números de 7 dígitos son *cuatroamigos*.
*Nota:* Un número *cuatroamigo* no puede tener dígitos 0 en sus representación decimal.

## Problema 3
Se forma una sucesión de números, cada uno de los cuales es igual al producto de 3 número consecutivos, de la siguiente forma: $1 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 4, 3 \times 4 \times 5, \ldots, 98 \times 99 \times 100$. Juan suma los inversos de todos estos números y obtiene como resultado un número racional, cuya expresión simplificada es $p/q$ (es decir, $p$ y $q$ no tiene divisores en común), con $p$ y $q$ naturales. Encontrar el valor de $p+q$.

## Problema 4
Se tiene un trapecio $ABCD$ con bases $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Un punto $E$ se mueve a lo largo del lado $\overline{AB}$ y se definen $O_1$, $O_2$ como los centros de las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos $AED$ y $BEC$, respectivamente. Demostrar que la distancia de $O_1$ a $O_2$ es constante, sin importar la posición del punto $E$.

## Problema 5
Determinar el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{5+\sqrt{5^2-9}}-\sqrt{11+\sqrt{11^2-9}}+\sqrt{17+\sqrt{17^2-9}}-\sqrt{23+\sqrt{23^2-9}}+\sqrt{29+\sqrt{29^2-9}}-\ldots+\sqrt{797+\sqrt{797^2-9}}.$$