XVIII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Primer Año de Bachillerato

Sábado 10 de Marzo de 2018

— **PARTE I:** *Las siguientes diez preguntas únicamente requieren la respuesta.* —

Pregunta 1

En una fiesta hay cuatro niñas y cuatro niños. Al final de la fiesta se le pregunta en voz alta a cada niño con cuantas niñas ha bailado y respondieron 4, 1, 2, 2. Mientras que las niñas dijeron que habían bailado con 2, 2 y 2 niños, pero no se escuchó la respuesta de la cuarta niña. ¿Con cuántos niños bailó la cuarta niña?

a) 0   b) 1   c) 2   d) 3   e) 4

Pregunta 2

En la expresión (___ × ___) + (___ × ___) cada espacio en blanco se rellena con uno de los dígitos $1, 2, 3$ o 4, donde cada dígito se utiliza una sola vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

a) 2   b) 3   c) 4   d) 6   e) 24

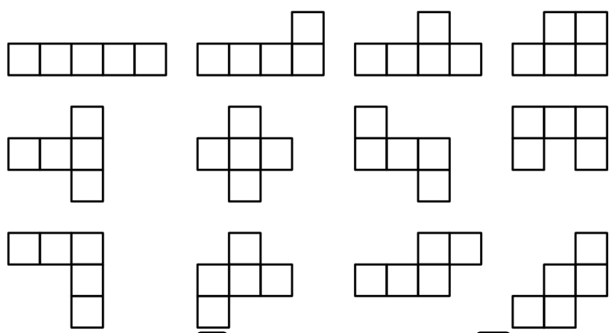
Pregunta 3

La mediana de la lista $n, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8, n+10, n+12, n+15$ es 10. ¿Cuál es la media?

a) 4   b) 6   c) 7   d) 10   e) 11

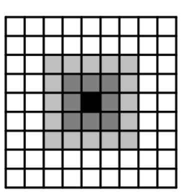
Pregunta 4

¿Cuántas de las 12 figuras siguientes tienen al menos un eje de simetría?



a) 3   b) 4   c) 5   d) 6   e) 7

Pregunta 5



El cuadradito negro se toma como el centro de un arreglo de cuadraditos unitarios, parte del cual se muestra al lado. El primer anillo de cuadraditos alrededor de este cuadradito central contiene 8 cuadraditos, el segundo anillo contiene 16 cuadraditos. Si se sigue con este proceso, el número de cuadraditos en el centésimo anillo es:

a) 396   b) 404   c) 800   d) 10,000   e) 10,404

Pregunta 6

Calcular para cuantos valores enteros positivos n se cumple que $1+2+\ldots+n$ es un factor de $6n$.

a) 3   b) 5   c) 7   d) 9   e) 11

Pregunta 7

Si x, y, z son reales positivos con $xy = 24$, $xz = 48$ y $yz = 72$, entonces $x + y + z$ es:

a) 18   b) 19   c) 20   d) 22   e) 24

Pregunta 8

Un dado convencional se tira y se calcula el producto P de las 5 caras visibles del dado. ¿Cuál es el número más grande que se puede garantizar que divide a P?

a) 6   b) 12   c) 24   d) 144   e) 720

Pregunta 9

Los puntos A, B, C y D están sobre una línea, en ese orden, con $AB = CD$ y $BC = 12$. El punto E está afuera de dicha línea tal que $BE = CE = 10$. El perímetro del triángulo $\triangle AED$ es el doble del perímetro del $\triangle BEC$. Encontrar la longitud del segmento AB.

a) $15/2$ b) 8 c) $17/2$ d) 9 e) $19/2$

Pregunta 10

Determinar para que rango de valores de a se cumple que las curvas $x^2 + y^2 = a^2$ y $y = x^2 - a$ se cortan en tres puntos distintos del plano cartesiano.

a) $a = \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ c) $a > \frac{1}{4}$ d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a > \frac{1}{2}$

— **PARTE II:** *Los siguientes dos problemas requieren soluciones con justificaciones completas.* —

Problema 1

Una función f está definida recursivamente por $f(1) = f(2) = 1$ y

$$f(n) = f(n-1) - f(n-2) + n$$

para todos los enteros $n \geq 3$. Calcule el valor de $f(2018)$.

Problema 2

Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 1 y sean M y N los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Si llamamos I al punto de intersección de los segmentos CM y DN, encuentre el área del triángulo CIN.