XVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

Grados participantes: desde 4º hasta 1er año de bachillerato.

Primera Fase: del 11 al 19 de febrero.

Segunda Fase: 10 de marzo.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

XVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA
2018

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XVIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA.

SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2018. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes del sistema bilingüe que hacen cambio de grado escolar a medio año deben registrarse y realizar la prueba del grado que iniciarán en 2018. Por ejemplo, si actualmente están en quinto grado y a medio año inician sexto, deben realizar el proceso como si estuvieran en sexto grado.

Otras consideraciones:

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.

- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la décimo octava Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente:

- El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **11 al 18 febrero**.

- Registrar sus datos personales en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv` a más tardar el **18 febrero** y guardar el comprobante de inscripción.

- Las pruebas deberán ser entregadas en la Dirección Departamental del Ministerio de Educación correspondiente al departamento de residencia del estudiante. Es importante aclarar que las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, debe imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre manila y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido.

- El estudiante puede llevar personalmente la prueba o podrá solicitar la colaboración de sus profesores, del Director de la Institución o de los padres de familia para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental, las pruebas se recibirán únicamente en estas oficinas, puede consultar en `http://www.mined.gov.sv` las direcciones, teléfonos y horarios de atención de estas oficinas para mayor información.

- La fecha de entrega de las pruebas en las oficinas de la Dirección Departamental del Ministerio de Educación es a más tardar el día **lunes 19 de febrero**, a las 3:00 p.m. para las zonas occidental, central, metropolitana y paracentral. Para la zona oriental (Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión) la entrega será a más tardar el día **miércoles 21 de febrero** a las 3:00 p.m.

REGISTRO

Para hacer efectivo el ingreso de datos, acceder al sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv`. Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono y dirección de correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y nombre.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado en la prueba por correspondencia que alcancen el puntaje requerido para clasificar deberán realizar una prueba presencial el día **sábado 10 de marzo** del presente año. La prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática en el **Edificio del Programa Jóvenes Talento**, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la **Universidad de El Salvador**, según la procedencia de cada estudiante.
Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en http://www.jovenestalento.edu.sv o http://www.mined.gob.sv desde el día **martes 6 de marzo de 2018** que especificarán el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba presencial. Para promover la participación del mayor número de instituciones, entre los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados **a lo sumo los mejores cinco estudiantes** que alcancen el puntaje requerido para clasificar. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez, dicha prueba se realizará después de finalizar la prueba presencial.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

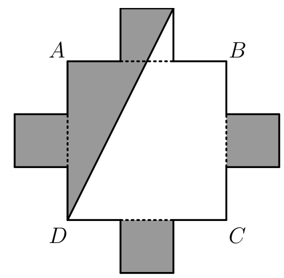
Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; mientras que el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar.
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física, Química e Informática.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en http://www.jovenestalento.edu.sv o http://www.mined.gob.sv el día **martes 20 de marzo de 2018**. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **24 de marzo de 2018** a partir de las 8:00 a.m. en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador (San Salvador), en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) y Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel), dependiendo de la sede donde haya sido seleccionado el estudiante y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la mañana luego de finalizar la inauguración.

Cuarto Grado

Problema 1

Los habitantes del *Planeta de las Emociones* viven del trueque y tienen tres productos muy importantes con los cuales comercian: Hongos del llanto, Café de la felicidad y Almendras de la risa. La unidad de medida de este planeta es el *puñado* y realizan el trueque del siguiente modo: Dos puñados de Hongos del llanto se pueden intercambiar por tres puñados de Café de la felicidad; y dos puñados de Café de la felicidad se pueden intercambiar por tres puñados de Almendras de la risa. Determinar el número de puñados de Almendras de la risa que recibiría alguien que ofrezca 40 puñados de Hongos del llanto.

Problema 2



Cada uno de los lados del cuadrado $ABCD$ se divide en tres segmentos iguales, y sobre el segmento central de cada lado se construye un cuadrado, como lo muestra la figura. Si el área de cada uno de los cuadrados pequeños es 4 cm^2, determinar el área de la zona sombreada.

Problema 3

Lucía, Marta, Nuria y Olga juegan “No te enojes”. Al terminar el juego sus amigos preguntaron los resultados a tres de ellas por separado. Cada niña dio dos respuestas, de las cuales solo una es verdadera. Las respuestas fueron:

> Marta: Nuria terminó en segundo y Olga en tercero.
>
> Lucía: Nuria terminó primero; Marta terminó en segundo.
>
> Nuria: Olga fue la última en terminar; Lucía terminó en segundo.

Determinar el orden correcto en el que Lucía, Marta, Nuria y Olga terminaron el juego.

Problema 4

La tarjeta de crédito de Agustín se ha dañado y han quedado visibles solo los números que se muestran:

7			7								8				

Agustín recuerda que los números de su tarjeta cumplían una curiosa regla: siempre que suma tres cifras consecutivas el total es 18. Determinar los números faltantes de la tarjeta de crédito de Agustín.

Problema 5

Una calculadora posee la siguiente tecla especial $\circledast$ que funciona de la siguiente manera:

> Si hay un número impar en la pantalla y se presiona la tecla $\circledast$, se sustituye este número por uno nuevo que es una unidad mayor que el triple de dicho número impar.
>
> En cambio, si el número en la pantalla es par, la tecla $\circledast$ lo sustituye por su mitad.

Por ejemplo: si la pantalla muestra el número 3 y se presiona $\circledast$, el resultado es 10 y si se vuelve a presionar $\circledast$, el resultado es 5.
Si inicialmente se muestra el número 5 en la pantalla, determinar el número que aparecerá después de presionar 2018 veces la tecla $\circledast$.

Problema 1

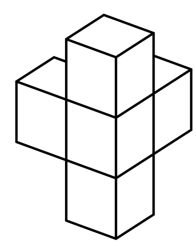
Juanita sigue una dieta especial de 2,400 Kcal al día y en la cena se le permite consumir no más de la cuarta parte de ellas. Debe elegir un menú tomando una opción de bebida, un plato principal, una ensalada y un postre de entre las opciones siguientes:

Menú		Energía (Kcal)
Bebidas	Café	85
	Chocolate	140
Plato principal	Pollo guisado	230
	Chuleta de res	220
Ensaladas	Ensalada fresca	80
	Ensalada de papas	115
Postres	Budín	240
	Flan	135

Determinar el menú que más se acerca a las condiciones nutricionales de Juanita.

Problema 2

Se tienen cinco dados y se pegan como muestra la figura, de modo que las caras que quedan pegadas suman 5. Si se suman los valores que quedan visibles, determinar los valores que pueden obtenerse.



Observación: un dado normal es un cubo tal que sus caras están numeradas del 1 al 6 y las caras opuestas suman 7.

Problema 3

Dos flechas se encuentran dentro de un triángulo y un pentágono de modo que apuntan a los vértices de éstos. A continuación se muestran cuatro figuras de la secuencia en que giran las flechas.

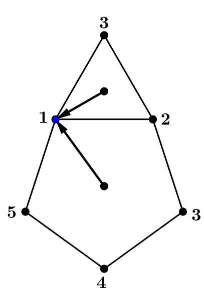


Figura 1

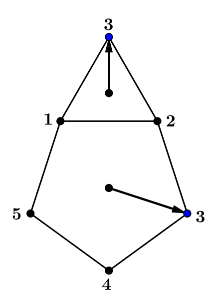


Figura 2

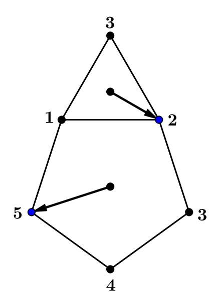


Figura 3

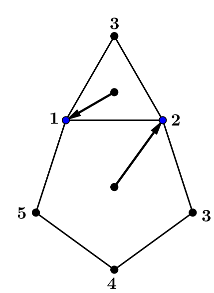
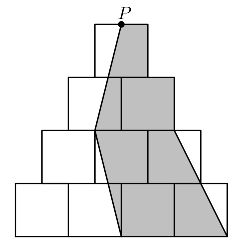


Figura 4

Si las flechas siguen siempre el mismo movimiento, determinar el número de figura en la cual las flechas habrán apuntado hacia el mismo punto por centésima vez.

Problema 4



La figura de la derecha muestra diez cuadrados iguales de lado 1 apilados de forma que la figura es simétrica. Si P es punto medio del lado del cuadrado sobre el que se ubica, calcular el valor del área sombreada.

Problema 5

Adrián, Benito, Carlos y David son cuatro jóvenes a los que les gusta ir a comer por las noches. Cada uno tiene un platillo favorito entre pizza, hamburguesa, hot dogs y tacos, no necesariamente en ese orden, y cada uno come solo de su platillo favorito. Se sabe lo siguiente:

(a) Uno de ellos fue por un hot dog mientras Carlos y Adrián dormían.

(b) Al que le gustan los tacos intenta convencer a Adrián y David de que los tacos son los mejores.

(c) Carlos y el que come hamburguesas se hicieron socios.

(d) David nunca ha conocido a Carlos.

Determinar el platillo favorito de cada amigo.

Sexto Grado

Problema 1

En el reino "Muy Muy Lejano" el rey tiene cuatro consejeros, de los cuales cada uno puede ser leal o traidor, los leales siempre dicen la verdad y los traidores siempre mienten. El rey sabe que tiene la misma cantidad de consejeros traidores que leales, los reúne para interrogarlos y afirman lo siguiente:

Consejero 1: El consejero 4 es un traidor.

Consejero 2: El consejero 1 miente.

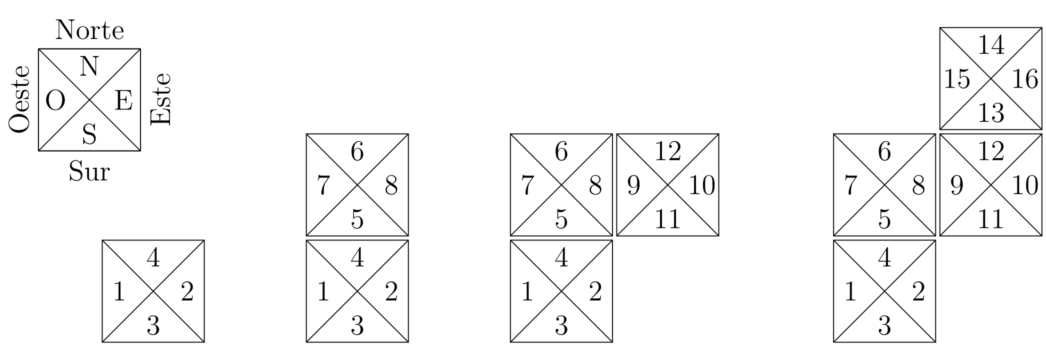
Consejero 3: No soy un traidor.

Consejero 4: El consejero 2 es leal.

Sabiendo que un leal solo puede ser amigo de un leal y un traidor solo puede ser amigo de un traidor, determinar cuáles consejeros son amigos entre sí.

Problema 2

Amelia construirá una escalera ocupando bloques cuadrados, cada uno de los cuales tiene cuatro espacios que debe numerar correctamente para que la escalera sea *resistente*. Comienza con el bloque mostrado en el paso 1, luego coloca un bloque arriba en el paso 2, y continúa colocando bloques de manera alternada a la derecha o arriba del anterior, como se muestra en los pasos 3 y 4.

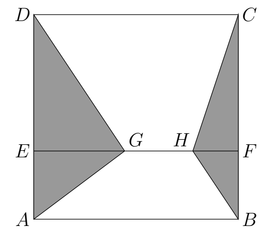


Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4

La escalera es *resistente* si cada vez que coloca un bloque arriba continúa la numeración desde el mayor número del bloque anterior de forma consecutiva en el orden sur, norte, oeste y este; mientras que cada vez que coloca un bloque a la derecha continúa la numeración en el orden oeste, este, sur y norte; de esta manera siempre los lados adyacentes de cada bloque son consecutivos. Si el último bloque que coloca Amelia es en el que aparece 2018, determinar cuántos bloques tiene la escalera y si el número 2018 está escrito en el norte, sur, este u oeste del último bloque colocado.

Problema 3

En la figura de la derecha, el lado del cuadrado $ABCD$ mide 9 cm y los segmentos DE y CF miden respectivamente el doble de los segmentos AE y BF. Sobre el segmento EF se marcan los puntos G y H de manera que $GH = 3$ cm. Encontrar el área de la región sombreada.



Problema 4

Para entrar a la convención de los matemáticos hay 7 puertas de acceso numeradas del 1 al 7. Para evitar el desorden, el organizador decide que hará diversas rondas para que las personas ingresen. En cada ronda, primero ingresa cierto número de personas por la puerta 1, luego cierto número de personas por la puerta 2, y así sucesivamente hasta finalizar la ronda con el ingreso de cierto número de personas por la puerta 7. En las siguientes rondas se procede de la misma forma. El número de personas que entran simultáneamente por cada puerta en una ronda es elegido en base a las siguientes reglas:

(a) Ingresan menos de 10 personas por puerta.

(b) Si la puerta es par, entra un número par de personas, y si es impar, entra un número impar de personas.

(c) El número de personas que ingresan por una puerta es mayor al número de dicha puerta.

(d) En puertas distintas entra un número distinto de personas.

Si Mario es la persona número 2018 en ingresar, determinar el número de la puerta por la que entró.

Problema 5

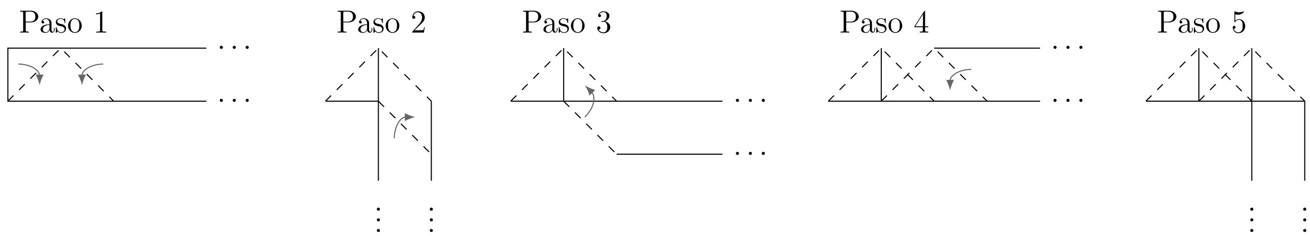
"*Multiplica por* 5 *o suma* 1" es un juego con dos controles: uno que multiplica por 5 y otro que suma 1. Bárbara escoge el control que usará y Alejandro, sabiendo la elección de Bárbara, escribe un número natural entre 1 y 100 en la pantalla. Luego comienzan a jugar: Bárbara presiona el botón en su control, luego Alejandro presiona el botón en su control, y siguen así alternadamente.

El jugador que gana es el que obtiene un número cuya última cifra sea igual a la última cifra de alguno de los números obtenidos en turnos anteriores de cualquier jugador. Determinar todas las estrategias que puede idear Alejandro para ganarle a Bárbara sin importar el control que ella elija.

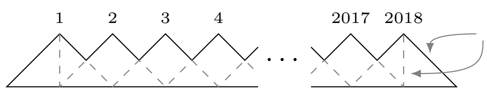
Séptimo Grado

Problema 1

Una tira rectangular de papel de 1 cm de ancho se dobla por las líneas punteadas siguiendo las flechas como indica cada uno de los siguientes pasos:



A partir del paso 6 se repiten los dobleces mostrados en los pasos 2, 3, 4 y 5 para formar la siguiente cadena con 2018 triángulos que se traslapan:



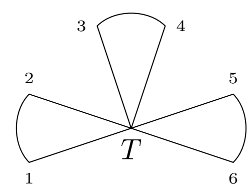
Las líneas continuas y punteadas indican el borde de la tira de papel

Determinar el área que debe tener la tira de papel para construir esa cadena.

Problema 2

La maratón *Trébol* se corre en una pista con tres hojas como muestra la figura de la derecha.

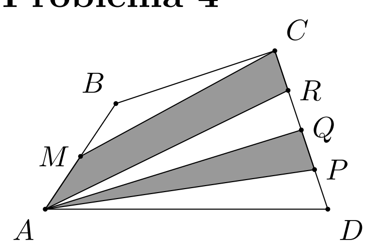
Iniciando y terminando en el punto T, Rodrigo debe conseguir las seis banderas situadas donde están los números pasando solamente una vez por cada hoja. Determinar cuántas rutas diferentes tiene Rodrigo para correr la maratón.



Problema 3

En el planeta *Multimat* un año tiene 180 días. Se sabe que A miente los días pares, B miente los días múltiplos de 3 y C miente los días múltiplos de 6. Cierto día entre los días 80 y 85, A dice que C mentirá mañana, B dice que A mentirá mañana y C dice que ayer mintió. Determinar el número del día.

Problema 4



En la figura de la izquierda se tiene que M es el punto medio del lado AB y que los puntos P, Q y R están sobre el lado CD, de manera que los segmentos DP, PQ, QR y RC tienen igual longitud. Si el área de la región sombreada es 2018 cm^2, calcular el área del trapezoide $ABCD$.

Problema 5

Un canguro quiere subir 4000 escalones. El canguro está parado en el suelo y comienza subiendo 7 escalones y luego baja 3 escalones, después da saltos hacia arriba y hacia abajo de manera alternada: cada vez que salta hacia arriba, avanza cuatro escalones más de los que avanzó la última vez que subió, y cada vez que salta hacia abajo, retrocede cuatro escalones más de los que retrocedió la última vez que bajó. Determinar si el canguro logrará llegar al escalón 4000 sin pararse en el escalón número 2018.

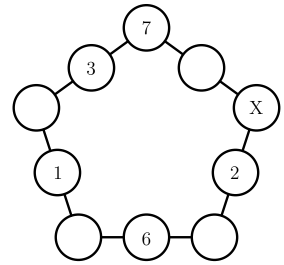
Octavo Grado

Problema 1

Los números 1, 5, 8, 9, 10, 12 y 15 son distribuidos en grupos de uno o más números, de forma que cada número está exactamente en un grupo, y la suma de los números en cada grupo es la misma. Determinar el mayor número posible de grupos.

Problema 2

Cristina escribió números en cinco de los diez círculos mostrados en la figura. Ella quiere escribir un número en cada uno de los cinco círculos restantes de modo que la suma de los tres números a lo largo de cada lado del pentágono sea igual. Determinar el número que tendrá que escribir en el círculo marcado con la X.

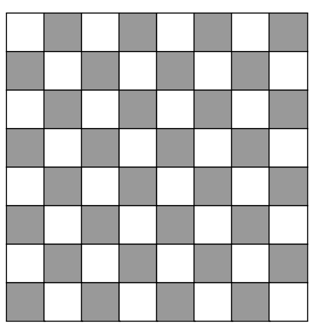


Problema 3

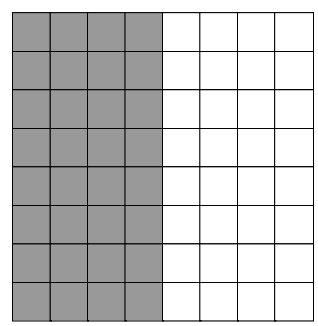
En un trapecio $ABCD$, sus bases AB y CD miden 50 cm y 20 cm respectivamente. Sobre el lado AB se toma un punto E tal que el segmento DE divide al trapecio en dos regiones con áreas iguales. Determinar la longitud del segmento AE.

Problema 4

José tiene un tablero de ajedrez de 8×8 y juega a cambiar el color de las casillas de la siguiente manera: en cada movimiento escoge algún bloque de 2×2 y luego dentro de ese bloque intercambia sus dos columnas o bien sus dos filas. Su objetivo es lograr que todas las casillas de la mitad derecha del tablero sean blancas y todas las de la mitad izquierda sean negras. Determinar si es posible que José cumpla su objetivo usando solo los movimientos permitidos. Si es posible, mostrar una manera de hacerlo, o en caso contrario justificar por qué es imposible.



Patrón inicial



Patrón final

Problema 5

En la Ruta de las Flores hay una misteriosa comunidad de lagartijas. Se sabe que cada lagartija tiene exactamente una o seis amigas en la comunidad. Al principio todas las lagartijas tenían su colita, pero cierto día, todas las lagartijas que tenían exactamente una amiga perdieron su colita, mientras las que tenían seis amigas la conservaron. Curiosamente esto hizo que en cada pareja de lagartijas que eran amigas, una tuviera colita y la otra no. Días después, a 30 de las lagartijas que no tenían colita les creció de nuevo y 40 que tenían colita la perdieron. Luego en cada pareja de lagartijas que son amigas, o las dos tienen colita o las dos no tienen. Determinar cuántas lagartijas hay en esa misteriosa comunidad.

Problema 1
Luis escribe en la pizarra la siguiente secuencia de números

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ...$$

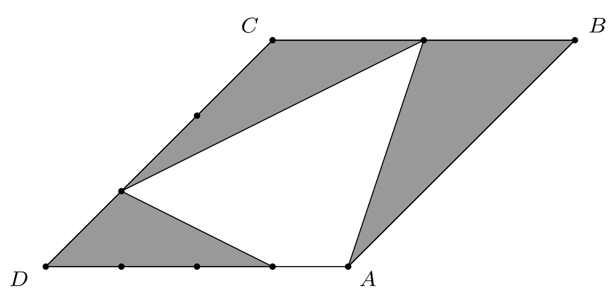
y se da cuenta de que a partir del tercer término de la secuencia cada elemento se obtiene sumando el término anterior a él, más dos veces el término anterior a este último. Por ejemplo:

$$3 = 1 + 2 \cdot 1, \quad 5 = 3 + 2 \cdot 1, \quad 11 = 5 + 2 \cdot 3, \quad 21 = 11 + 2 \cdot 5$$

y así sucesivamente. Calcular el resto que deja el elemento que ocupa el lugar 2018 de la sucesión en la división por 7.

Problema 2
En una escuela los casilleros se numeran consecutivamente, empezando por el casillero número 1. Los dígitos de plástico usados para numerar los casilleros cuestan cada uno 2 centavos. Por ejemplo, cuesta dos centavos rotular el casillero 9, cuesta 4 centavos rotular el casillero 10, y cuesta 6 centavos rotular el casillero 100. Si para rotular todos los casilleros se requieren \$139.30 en total, determinar la cantidad de casilleros que hay en la escuela.

Problema 3
Los lados BC, CD y DA del paralelogramo $ABCD$ se dividen respectivamente en dos, tres y cuatro segmentos de igual longitud. Si se sabe que el paralelogramo tiene área 2, calcular el valor del área sombreada.



Problema 4
Carlos tiene un tablero cuadriculado de dimensiones 4×4 y siete fichas negras que desea colocar de tal forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera del tablero, siempre quede alguna ficha sin eliminar. Demostrar que Carlos puede lograr su objetivo. Además, explicar por qué no puede lograrlo si dispone únicamente de seis fichas.

Problema 5
Encontrar todas las ternas de números enteros (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 3 = yz$$

$$y + 2 = zx$$

Primer Año de Bachillerato

Problema 1

Manuel escribe una lista con los enteros positivos del 1 al 2018. A continuación, coloca un signo negativo enfrente de todas las potencias de 2 y un signo positivo enfrente de todos los demás números, es decir:

$$-1-2+3-4+5+6+7-8+\ldots+2018$$

Calcular el resultado que obtiene Manuel al efectuar las operaciones indicadas.

Problema 2

Determinar la cantidad de números enteros n entre 1 y 2018, ambos inclusive, tales que el producto

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

es también un entero.

Problema 3

Determinar todas las parejas (x, y) de números reales que satisfacen la siguiente ecuación:

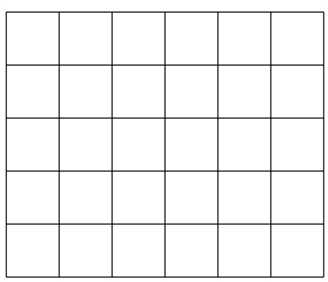
$$(x+y)^2=(x+2018)(y-2018).$$

Problema 4

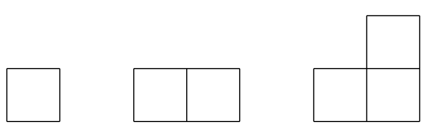
En el triángulo ABC, el ángulo $\angle ACB$ mide $90°$. Las bisectrices internas de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en P y Q, respectivamente. Los puntos M y N son los pies de las perpendiculares desde P y Q al lado AB. Calcular la medida del ángulo $\angle MCN$.

Problema 5

Carlos juega por turnos con Rodrigo en el siguiente tablero de 5×6.



Un movimiento consiste en ubicar en el tablero una pieza de alguno de los siguientes tres tipos:



Las piezas se pueden rotar antes de ubicarse y no se permite que se traslapen con las colocadas anteriormente en el tablero. Gana quien termina de cubrir el tablero.
Si Carlos mueve primero, determinar el jugador que puede asegurarse la victoria y la estrategia que debe seguir para ganar.