XII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

2012

Ministerio de Educación

GOBIERNO DE EL SALVADOR

UNIR, CRECER, INCLUIR

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

DE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2012 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado inferior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado inferior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica de que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente en los gráficos.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpíada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PROCEDIMIENTO DE PARTICIPACIÓN EN LA DÉCIMA SEGUNDA OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA:

El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del **12 al 20 de febrero** y entregar las soluciones en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día martes **21 de febrero** a las 3:00 p.m.

Las soluciones e información pertinentes deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, que contendrá en la carátula y en una página dentro del mismo todos los datos del estudiante. Este será revisado para determinar el total de problemas resueltos y será sellado y firmado por la persona responsable del MINED, quien entregará constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto, las pruebas se recibirán únicamente en la correspondiente Dirección Departamental cuyos teléfonos y direcciones pueden consultarse en **www.mined.gob.sv**.

LOS ESTUDIANTES DEBERÁN PRESENTAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Primer nombre, segundo nombre, primer apellido, segundo apellido, fecha de nacimiento: día, mes y año; grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, dirección de correo electrónico.

Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: nombre, modalidad (público, privado), dirección, teléfono, profesor responsable: dirección y teléfono.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial el día 10 de marzo del presente año**, en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador. Los concursantes clasificados serán notificados en su Centro Escolar y alternativamente podrán consultar los listados publicados en **www.mined.gob.sv** del Ministerio de Educación desde el día 5 de marzo de 2011. **Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**

Este mismo día se realizará una prueba psicológica, por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde las ocho y media de la mañana hasta las cuatro de la tarde.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador y el Center for the Advancement of Hispanics in Science and Engineering Education, con sede en Washington D.C.

El programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos y el de inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, de desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso de **Futuros Dirigentes Técnico Científicos**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de cuatro semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpíadas internacionales de Matemática, Física, Química y Biología.

La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en www.mined.gob.sv el día 19 de marzo de 2012.

La Academia Sabatina se inaugurará el sábado 24 de marzo de 2012 en el auditórium de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador a las 10:00 a.m. y este mismo día se iniciarán las actividades académicas.

XII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2012

CUARTO GRADO

Problema 1.

Un canguro es capaz de saltar 2 metros cuando se impulsa con su pierna izquierda, 4 metros cuando se impulsa con la pierna derecha y 9 metros cuando se impulsa con las dos piernas. ¿Cuál es la menor cantidad de saltos que tendría que hacer el canguro para avanzar **exactamente** 2012 metros? Explicar su razonamiento.

Problema 2.

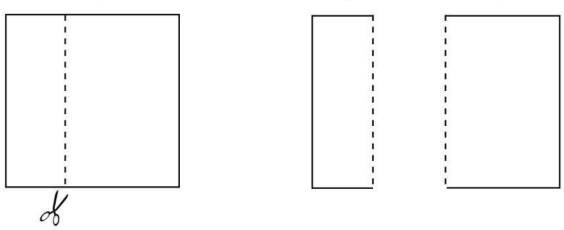
Iris, Dalila, Gabriela, Gerardo, Iván y Mario se sentaron alrededor de una mesa circular en un restaurante. Ni Iván, ni Gerardo, ni Mario se sentaron junto a otro de ellos tres. Además, los nombres de cualesquiera dos personas que estaban sentadas juntas empezaban con letras distintas. ¿Quién estaba sentado en la posición opuesta a Mario? Explicar su razonamiento.

Problema 3.

Ana hizo un corte vertical a un cuadrado de papel cuyo perímetro era 20 centímetros, obteniendo así dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos recortados es 16 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro rectángulo?.

Cuadro original

Rectángulos obtenidos luego del corte



Perímetros: 20 cm

¿?

16 cm

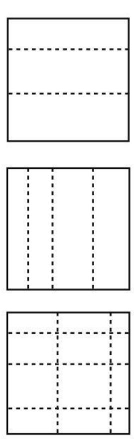
Problema 4.

En cierto año, el mes de enero tuvo tres martes que correspondieron a días con número par. ¿Qué día de la semana correspondió al 21 de ese mes? Analizar todas las posibilidades.

Problema 5.

Se quiere partir un pastel cuadrado en exactamente 52 porciones, utilizando cortes rectos que lo atraviesen por completo y que sean paralelos a sus lados. ¿Cuál es el número mínimo de cortes que se requieren?

Explicar detalladamente por qué el número de cortes encontrado es el mínimo necesario.



2 cortes horizontales

3 porciones

2 cortes verticales

4 porciones

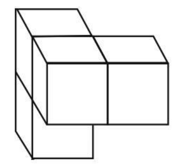
3 cortes horizontales y 2 cortes verticales

12 porciones

QUINTO GRADO

Problema 1.

¿Cuánto mide la superficie de la siguiente figura si está formada con cubos de lado 1 centímetro? Explicar su razonamiento.



Problema 2.

Un piso cuadrado se rellena con azulejos cuadrados del mismo tamaño, tal que se cubre completamente y ningún azulejo se superpone a otro. Se utilizan azulejos negros para rellenar las dos diagonales del piso. Los azulejos restantes son blancos. Si hay 101 azulejos negros, ¿cuál es el número de azulejos blancos?

Problema 3.

Ruth escoge dos números del conjunto {1, 2, 3, 4}. Las posibles formas de hacer esto son: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4} y {3,4}. De cada pareja, Ruth escoge al número mayor y efectúa la suma de dichos números, obteniendo como resultado 20. Ruth repite este proceso ahora para el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, escoge al número mayor de cada posible pareja y luego efectúa la suma de dichos números mayores, ¿cuál es el resultado final que Ruth obtuvo en este último caso?

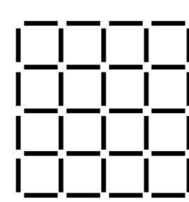
Problema 4.

Los números pares 2, 4, 6, 8,… se colocan en 5 columnas, tal como se muestra en la tabla siguiente. ¿En qué fila y en qué columna aparece el 2012? Explicar su razonamiento.

	1ª Columna	2ª Columna	3ª Columna	4ª Columna	5ª Columna
1ª Fila		2	4	6	8
2ª Fila	16	14	12	10	
3ª Fila		18	20	22	24
4ª Fila	32	30	28	26	
5ª Fila		34	36	38	40
6ª Fila	48	46	44	42	
7ª Fila		50	52	54	56
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Problema 5.

Con cerillos se formó la figura que se muestra. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que se deben remover para que la figura resultante no posea ningún cuadrado? Explicar detalladamente por qué la cantidad encontrada de cerillos removidos es la mínima y mostrar una configuración resultante al remover esa cantidad de cerillos.



XII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2012

SEXTO GRADO

Problema 1.

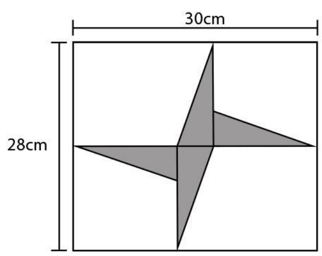
Se tienen 32 cubitos de lado 1cm con todas sus caras de color negro y 32 cubitos de lado 1cm con todas sus caras de color blanco. Con estos 64 cubitos se arma un cubo de lado 4cm.
¿Cuál es la máxima cantidad de cuadrados negros de lado 1cm que se pueden obtener sobre la superficie del cubo de lado 4cm? Explicar su razonamiento.

Problema 2.

Un profesor escribe en la pizarra los números: 13, 9, 17, 10, 7, 16, y encuentra el promedio de ellos. María borra dos de esos números y nota que el promedio de los números restantes es el mismo. ¿Cuáles fueron esos números borrados?

Problema 3.

La figura siguiente muestra 4 triángulos rectángulos iguales dentro de un rectángulo de base 30cm y altura 28cm. ¿Cuál es el área total de los 4 triángulos? Explicar su razonamiento.



Problema 4.

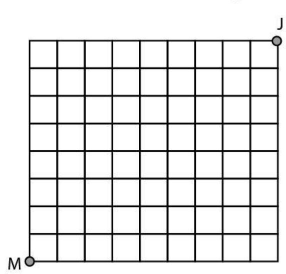
Un astronauta quiere visitar a su amigo marciano, Doman, pero no sabe en qué ciudad vive. Los habitantes de Uti siempre dicen la verdad, los de Yomi siempre mienten, y los de Grundi a veces dicen la verdad y otras veces mienten. El astronauta encuentra tres marcianos: Babel, Aba y Sharik, que son uno de cada ciudad, pero no sabe de cuál. Les hace dos preguntas a cada uno: la primera, "¿De qué ciudad es usted?", y la segunda, "¿De qué ciudad es Doman?".

Babel contestó: "No soy de Uti. Doman es de Yomi."
Aba contestó: "No soy de Yomi. Doman es de Grundi."
Sharik contestó: "No soy de Grundi. Doman es de Uti."

¿De qué ciudad es Doman? Explicar su razonamiento .

Problema 5.

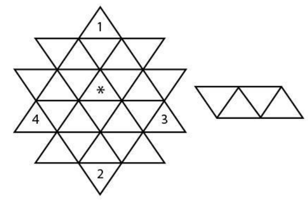
Una hormiga se encuentra moviéndose sobre una cuadrícula de 8x9. Un movimiento consiste en desplazarse un espacio horizontal o verticalmente sobre los lados de la cuadrícula, sin importar la dirección. Si inicialmente la hormiga se encontraba en el punto M, ¿será posible llegar al punto J después de ***exactamente*** 2012 movimientos? Argumentar detalladamente su respuesta.



SÉPTIMO GRADO

Problema 1.

En la figura siguiente, debe colocarse uno de los números 1, 2, 3 ó 4 en cada triángulo de la pieza izquierda, de manera que si la pieza de la derecha se coloca cubriendo exactamente cuatro triángulos de la pieza izquierda, los números cubiertos deben ser todos diferentes (la pieza de la derecha se puede girar y voltear antes de colocarla). En la figura mostrada, ya se han numerado cuatro triángulos en la pieza izquierda, ¿qué número debe ir en el triángulo marcado con asterisco * ? Explicar su razonamiento.



Problema 2.

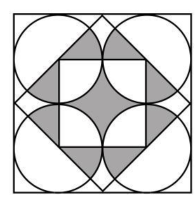
Un auto viaja de **A** a **B** a velocidad constante. A las 8:00 de la mañana ha recorrido exactamente la tercera parte del camino entre **A** y **B**, y a las 12:00 del mediodía ha recorrido en total 3/5 partes del camino entre **A** y **B**. Determinar a qué hora habrá recorrido exactamente la mitad del camino entre **A** y **B**.

Problema 3.

Seis bolsas de canicas contienen 18, 19, 21, 23, 25 y 34 canicas, respectivamente.
Cinco de las bolsas contienen únicamente canicas azules y la restante contiene únicamente canicas rojas. Juan tomó tres bolsas con canicas azules y Jorge tomó las dos bolsas restantes que contienen canicas azules. Nadie tomó la bolsa con canicas rojas. Si Juan obtuvo el doble de canicas que Jorge, ¿cuántas canicas rojas hay? Explicar su razonamiento.

Problema 4.

En la siguiente figura, se muestran tres cuadrados de distinto tamaño y cuatro circunferencias del mismo radio cuyos centros son los vértices del cuadrado más pequeño. ¿Qué porción del cuadrado más grande está sombreada?



Problema 5.

Con 8 cubitos blancos de lado 1cm, Mónica tiene que armar un cubo de lado 2cm.
Luis quiere pintar de negro algunas caras de algunos de los 8 cubitos, de manera que a Mónica le resulte imposible lograr que su cubo de lado 2cm sea totalmente blanco por fuera. Determinar el mínimo número de caras de cubitos que tiene que pintar Luis para conseguir esto. Determinar además el número mínimo de caras de cubitos que tendría que pintar Luis para conseguir el mismo objetivo, si Mónica se dispone a armar un cubo de lado 3cm con 27 cubitos blancos de lado 1cm.

OCTAVO GRADO

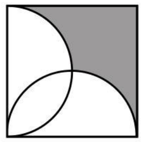
Problema 1.

Sea P la suma de los primeros enteros positivos pares de cuatro cifras y sea I la suma de los enteros positivos impares de 4 cifr as. Encontrar el valor numérico de P-I.

XII OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2012

Problema 2.

Sobre dos lados adyacentes de un cuadrado de lado 2cm, se dibujan semicircunferencias tal como muestra en la siguiente figura:



Encontrar el área de la parte sombreada.

Problema 3.

A cada letra de la palabra PEPITO se le asigna un dígito de tal forma que a letras iguales se les asignan dígitos iguales y a letras distintas se les asignan dígitos distintos. Al hacer esto resulta un número de 6 cifras. De todos los valores que puede tomar este número de 6 cifras, encontrar el mayor número que sea divisible por 55.

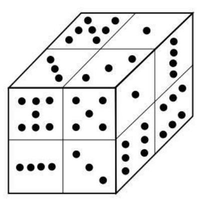
Problema 4.

Se tiene una lista con los números del 1 al 1025, ordenados de menor a mayor: 1, 2, 3, 4, …, 1024, 1025. De esta lista, se borran algunos números utilizando el procedimiento siguiente: se inicia de izquierda a derecha dejando un número y borrando el siguiente número, haciendo esto hasta el final de la lista. En esta primera etapa se borran los números 2,4,6... En la segunda etapa se hace lo mismo con la lista de números aún no borrados: dejar uno, borrar el siguiente, dejar el que sigue, borrar el siguiente, …, etc., pero comenzando de derecha a izquierda. En la tercera etapa, se repite el mismo procedimiento a la lista de números aún no borrados pero comenzando de izquierda a derecha. Así sucesivamente, en cada etapa se alterna el orden de inicio del procedimiento de borrado, y se sigue así hasta que quede un solo número escrito. Determinar cuál es ese número.

Problema 5.

Se dibujan puntitos negros sobre cada una de las caras de un cubo de lado 1cm. Al terminar, se hacen 7 copias de este cubo manteniendo intactas las posiciones de los puntos sobre las caras.

Con los 8 cubos resultantes, se construye el cubo de lado 2cm mostrado a continuación, teniendo visibles únicamente 3 de sus caras. Encontrar la máxima cantidad de puntitos que pueden estar dibujados sobre las 3 caras que no son visibles.



Nota: Observar que los cubos de lado 1 no son iguales a los dados convencionales.

NOVENO GRADO

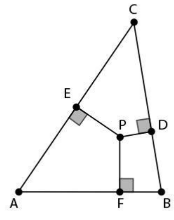
Problema 1.

¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que la suma de los dígitos en las posiciones pares es 7, mientras que la suma de los dígitos en las posiciones impares es 5?

Nota: las posiciones de las cifras de un número se cuentan de derecha a izquierda.

Problema 2.

Desde el punto P interior al triángulo ABC, se trazan las perpendiculares a los lados BC, CA y AB, las cuales cortan a dichos lados en los puntos D, E y F respectivamente. Si AF=12, FB=6, BD=12, DC=14 y CE=13, calcular AE.



Problema 3.

Determinar la cantidad de números naturales n menores o iguales a 2012 tales que $3^n - n^2$ es múltiplo de 5.

Problema 4.

Se distribuyen los primeros 53 números enteros positivos {1, 2, 3, …, 53} en dos conjuntos M y N, colocando 27 números en M y los restantes en N. La distribución está hecha de tal forma que el promedio de los elementos de M es igual al promedio de los elementos de N, y al extraer un número adecuado de M y pasarlo a N, el promedio de los elementos del nuevo conjunto M es igual al promedio de los elementos del nuevo conjunto N. Encontrar el número que se extrajo de M.

Problema 5.

Se debe rellenar una cuadrícula de 4 filas y 503 columnas con los números enteros positivos desde 1 hasta 2012, sin repetir, bajo la siguiente regla: en cada fila, de izquierda a derecha, los números están ordenados de menor a mayor, pero no son necesariamente números consecutivos. El objetivo es que la suma de los cuatro números de la columna 500, contando de izquierda a derecha, sea lo mayor posible. Determinar el máximo valor que puede tener la suma de los números de la columna 500 e indicar una distribución posible de los 2012 números que permita lograr esa suma.

PRIMER AÑO DE BACHILLERATO

Problema 1.

Determinar todos los números de tres cifras $\overline{XYZ}$ que cumplen la igualdad

$$\overline{XYZ} + \overline{YXZ} = \overline{WWZZ}$$

donde cada letra representa un dígito, letras iguales representan dígitos iguales y letras distintas dígitos distintos.

Nota: la notación $\overline{ABC}$ y $\overline{ABCD}$, representa números de tres y cuatro cifras, respectivamente; se utiliza una barra sobre las letras para distinguir estos números de los productos ABC= A x B x C y ABCD = A x B x C x D .

Problema 2.

Una máquina para numerar páginas está arruinada, el problema que tiene es que no imprime los números que son múltiplos de 3 ni los que son múltiplos de 5. La numeración en las páginas de un libro es la siguiente:

1, 2, 4, 7, 8, 11, …

Si el último número impreso en este libro es 2012, determinar la cantidad de páginas que tiene el libro.

Problema 3.

Sean x, y, z, tres números positivos que satisfacen

$$x + \frac{1}{y} = \frac{7}{3}$$

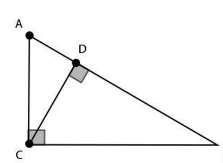
$$y + \frac{1}{z} = 1$$

$$z + \frac{1}{x} = 4$$

Determinar el producto xyz .

Problema 4.

Sea ABC un triángulo rectángulo en C, se traza la altura CD con D sobre el segmento AB. Se cumple que el área del triángulo ADC es la cuarta parte del área del triángulo ABC. Determinar las medidas de los ángulos del triángulo ABC.



Problema 5.

Determinar para qué valor n es posible formar con 9 personas, n grupos de 3 personas cada uno de modo que cada par de personas se encuentra en exactamente un grupo. Mostrar una de las posibles configuraciones de los grupos.