

# X OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2010

**El Ministerio de Educación y la Universidad de El Salvador invitan a los jóvenes del Sistema Educativo Nacional a participar en la X Olimpiada Nacional de Matemática.**

## DE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2010 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado inferior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado inferior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica de que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente en los gráficos.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- **Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.**

## PROCEDIMIENTO DE PARTICIPACIÓN EN LA DÉCIMA OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA:

El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del **14 al 22 febrero** y entregar las soluciones en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día martes **23 de febrero**, a las 3:00 p.m.

Las soluciones e información pertinentes deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, que contendrá en la carátula y en una página dentro del mismo todos los datos del estudiante. Este será revisado para determinar el total de problemas resueltos y será sellado y firmado por la persona responsable del MINED, quien entregará constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto.

## LOS ESTUDIANTES DEBERÁN PRESENTAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Primer nombre, segundo nombre, primer apellido, segundo apellido, fecha de nacimiento: día, mes y año; grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, correo electrónico si lo tuviese.

Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: Nombre, modalidad (público o privado), dirección, teléfono, código del centro escolar, profesor responsable: dirección, teléfono, correo electrónico si lo tuviese.

## ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial el día 13 de marzo del presente año** en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador. Los concursantes clasificados serán notificados en su Centro Escolar y alternativamente podrán consultar los listados publicados en [www.mined.gob.sv](http://www.mined.gob.sv) del Ministerio de Educación desde el día 8 de Marzo de 2010.

**Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**

Este mismo día se realizará una prueba psicológica por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde las ocho y media de la mañana hasta las cuatro de la tarde.

## INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador y el Center for the Advancement of Hispanics in Science and Engineering Education, con sede en Washington D.C.

Los estudiantes seleccionados serán notificados en su Centro Escolar y alternativamente podrán consultar los listados publicados en [www.mined.gob.sv](http://www.mined.gob.sv) del Ministerio de Educación.

El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos y el de inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, de desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso de **Futuros Dirigentes Técnico Científicos**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de cuatro semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Física y Química.

**La Academia Sabatina se inaugurará el sábado 27 de marzo e iniciará actividades el sábado 10 de abril.** Los mejores estudiantes de la Academia Sabatina participan en el curso de Futuros Dirigentes Técnico Científicos en el que se imparten materias de nivel universitario, relacionadas con ciencia y tecnología modernas, con la intención de enseñar al alumno a pensar en términos científicos y técnicos, promoviendo en ellos el liderazgo en tales campos.

## CUARTO GRADO

### PROBLEMA 1:

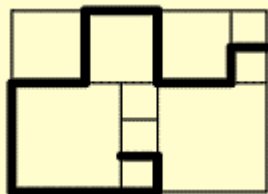
Un lorito está trepando por el tronco liso de un árbol que le da bastantes problemas. Tantos, que después de subir 3 metros, se resbala retrocediendo 2 metros, luego de lo cual descansa. Si el tronco tiene 10 metros, ¿cuántos descansos hizo?

### PROBLEMA 2:

Tres amigos se ubican en fila. El primero dice 3, el segundo dice 6, el tercero dice 9, el primero dice 12 y siguen contando de tres en tres. Juan dice 27, Esteban 75 y Ana 42. ¿Quién dice 291 si siguen contando en el mismo orden? Explicar por qué.

### PROBLEMA 3:

En la figura hay cuadrados de tres tamaños distintos. El lado del cuadrado más pequeño mide 1cm. ¿Cuál es la longitud de la línea marcada con el trazo más grueso?



### PROBLEMA 4:

Para llenar un álbum se necesitan 320 figuritas. Ayer, Camila tenía completa la cuarta parte del álbum. Hoy le regalaron 24 paquetes de 6 figuritas cada uno. Después de abrir todos los paquetes, encontró sólo 37 figuritas repetidas. ¿Cuántas figuritas le faltan para completar el álbum?

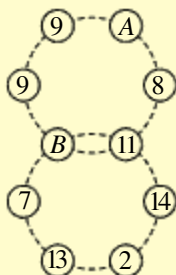
### PROBLEMA 5:

Eder tiene una manzana verde, una roja y una amarilla. Se sabe que la manzana verde y la roja juntas pesan 430 g, que la manzana verde y la amarilla juntas pesan 370 g y que la manzana roja y la amarilla juntas pesan 360 g. ¿Cuánto pesa cada manzana?

## QUINTO GRADO

### PROBLEMA 1:

En la siguiente figura, se escriben números en los lugares A y B de manera que en cada círculo la suma sea la misma. ¿Qué número debe colocarse en el lugar de A?

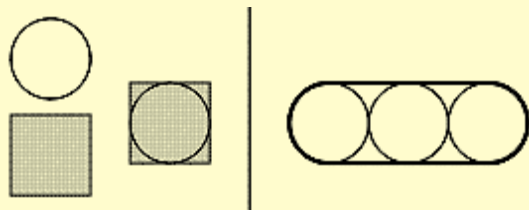


### PROBLEMA 2:

Se quiere llenar una caja de dimensiones 30x30x50 con cubos del mismo tamaño. ¿Cuál es el mínimo número de cubos con el que puede hacerse eso?

### PROBLEMA 3:

Si se superponen el círculo y el cuadrado de la izquierda, se forma una figura como la que se muestra al centro. ¿Cuántos cuadrados y cuántos círculos de la izquierda se necesitan para rellenar la figura de la derecha, si se permite cortar en dos o más partes cada cuadrado y cada círculo a utilizar?

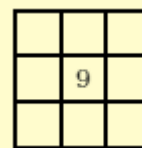


### PROBLEMA 4:

Isabel compró peras, manzanas y piñas (al menos una de cada una). Una pera cuesta una moneda, una manzana cuesta dos y una piña cuesta cuatro (todas las monedas tienen el mismo valor). Si compró 10 frutas y pagó con 16 monedas, ¿cuántas piñas compró?

### PROBLEMA 5:

¿De cuántas formas es posible acomodar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en los cuadritos libres de la figura, de forma que los números de la primera fila sean impares y la suma de los números de cada fila y cada columna sea la misma?



## SEXTO GRADO

### PROBLEMA 1:

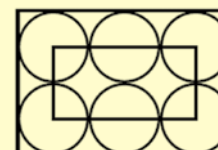
Eriol escribe una secuencia de números naturales, cumpliendo estas reglas:

- Si el último número escrito es par, lo divide por 2 y el resultado es el siguiente número de la secuencia.
- Si el último número escrito es impar, entonces lo multiplica por 3 y luego le suma 1, el resultado es el siguiente número de la secuencia.

Si el primer término de la secuencia es 20, ¿cuál será el término que escribirá Eriol en la posición 2010 de la secuencia?

### PROBLEMA 2:

En la figura siguiente se muestran 6 círculos idénticos. El rectángulo más pequeño pasa sobre los centros de todos los círculos y su perímetro es 60 cm. Encontrar el perímetro y área del rectángulo grande.



### PROBLEMA 3:

Symon está en la búsqueda de los números naturales que satisfacen todas las condiciones siguientes:

- El número es par.
- El número deja residuo 1 al dividirlo entre 5.
- El número es múltiplo de 7.
- El número es menor que 1000.
- La suma de los dígitos del número es 23.

¿Cuántos y cuáles números encontró Symon?

### PROBLEMA 4:

Una caja contiene 2 calcetines blancos, 3 rojos y 4 azules. Alfonso sabe que un tercio de los calcetines tienen un agujero, pero no sabe de qué color son los calcetines agujereados. Saca al azar y sin mirar, calcetines de la caja, esperando sacar dos calcetines sin agujero y del mismo color. ¿Cuántos calcetines como mínimo debe sacar para garantizar que puede conseguirlo?

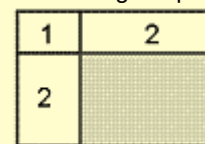
### PROBLEMA 5:

Hay 60 pájaros en tres árboles. En un instante vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo que en el primer árbol, y el doble en el tercero respecto al segundo, ¿cuántos pájaros había originalmente en el segundo árbol?

## SÉPTIMO GRADO

### PROBLEMA 1:

En la siguiente figura, cada número indica el perímetro del rectángulo que lo contiene. Calcular el perímetro del rectángulo que falta.

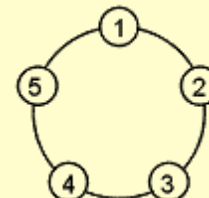


### PROBLEMA 2:

Un saltamontes salta en la siguiente figura, cumpliendo las siguientes reglas:

- Salta de un número a otro en la orientación de las manecillas del reloj.
- Si está sobre un número par, da dos saltos.
- Si está sobre un número impar, da un salto.

Si el saltamontes se encuentra originalmente en el número 5, ¿en qué número se encontrará luego de 2010 saltos?



**PROBLEMA 3:**

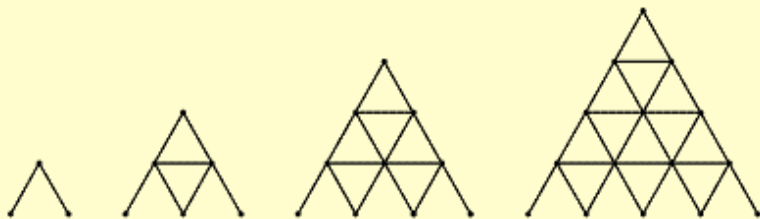
Andrea, Beto, Celeste y Daniel han obtenido los cuatro primeros puestos en el torneo de esgrima. Si se suma los números de los puestos de Andrea, Beto y Daniel se obtiene el número 6. Lo mismo ocurre si se suma los números de los puestos de Beto y Celeste, también se obtiene 6. ¿Quién ganó el primer lugar, si el número del puesto de Beto es mayor que el de Andrea?

**PROBLEMA 4:**

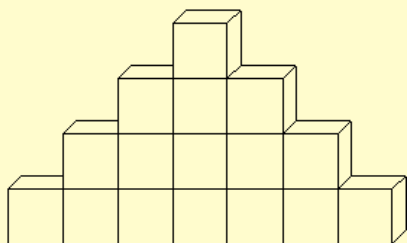
En cada cara de un cubo se trazan diagonales. Diremos que dos diagonales son *amigas* si comparten un vértice. ¿Cuál el mayor número de diagonales amigas que puede tener un cubo?

**PROBLEMA 5:**

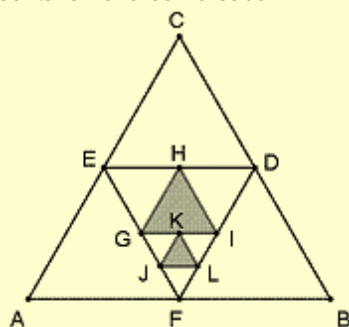
Se puede formar pirámides con palillos, como muestra la figura: Una de 1 piso con 2 palillos, una de 2 pisos con 7 palillos, una de 3 pisos con 15 palillos, etc. Determinar cuántos palillos se necesitan para formar una pirámide de 2010 pisos.

**OCTAVO GRADO****PROBLEMA 1:**

Con cubos de madera todos iguales, Hiromi armó esta torre de  $864\text{cm}^2$  de área total (incluyendo el área de la base). Con todos los cubos que Hiromi usó se llena una caja de 16cm de largo y 8cm de ancho. ¿Cuál es la altura de esa caja?

**PROBLEMA 2:**

En la siguiente figura ABC es un triángulo equilátero. Sean D, E y F puntos medios de los lados del triángulo ABC; G, H e I puntos medios de los lados del triángulo DEF; J, K y L puntos medios de los lados del triángulo GFI. ¿Qué fracción del cuadrilátero ABDE representa la zona sombreada?

**PROBLEMA 3:**

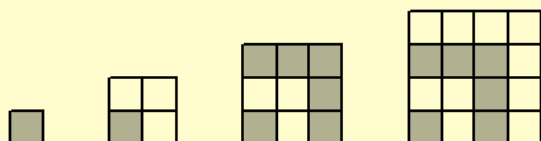
En una fiesta hay 15 mujeres y algunos hombres; algunas personas se conocen y otras no (si una persona A conoce a una persona B también B conoce a A). Primero, cada mujer le regala una galleta a cada hombre que conoce. Luego, cada hombre le regala una galleta a cada mujer que no conoce. En total se regalaron 240 galletas. ¿Cuántos hombres llegaron a la fiesta?

**PROBLEMA 4:**

Con fichas cuadradas blancas (B) y negras (N) todas iguales, se arman cuadrados de la siguiente forma:

- Un cuadrado  $1 \times 1$  está formado por una ficha N
- Un cuadrado  $2 \times 2$  se forma bordeando el cuadrado  $1 \times 1$  con fichas B
- Un cuadrado  $3 \times 3$  se forma bordeando el cuadrado  $2 \times 2$  con fichas N
- Un cuadrado  $4 \times 4$  se forma bordeando el cuadrado  $3 \times 3$  con fichas B
- ... y así sucesivamente.

Si se tienen 496 fichas B, ¿cuánto mide el lado del cuadrado más grande que se puede armar siguiendo esta forma?, ¿cuántas fichas N se necesitarán?

**PROBLEMA 5:**

Ana escribió los números 1, 2, 3, 4, ..., 2010, 2011 en una pizarra, y luego les aplicó la siguiente operación: Escoge dos números, los borra y escribe en la pizarra su diferencia. Demostrar que después que Ana realiza 2010 de estas operaciones, el número que queda es par.

**NOVENO GRADO****PROBLEMA 1:**

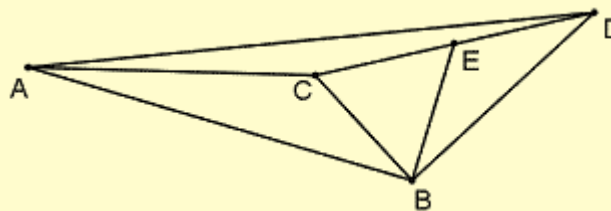
Un número entero es llamado *ascendente* si cada dígito en el número es mayor que el dígito de su izquierda. Por ejemplo: 2478 es un número *ascendente*, mientras que 2477 no lo es. ¿Cuál es la cantidad de números *ascendentes* entre 4000 y 5000?

**PROBLEMA 2:**

Seis personas tratan de adivinar el número de piedras que hay en una caja. Ana dice que hay 52 piedras, Beatriz 59, Carlos 62, Daniel 65, Elisa 49 y Fernando 42. Todos se equivocaron, algunos dijeron de más y otros dijeron de menos, y sus errores fueron de 1, 4, 6, 9, 11 y 12, en algún orden, pero no se sabe quién cometió cada error. Determinar cuántas piedras hay en la caja y qué error cometió cada persona.

**PROBLEMA 3:**

Sea E y D puntos exteriores al triángulo ABC tales que C, E y D están alineados, como se muestra en la siguiente figura. El ángulo ACB mide  $134^\circ$ , el ángulo BCD mide  $60^\circ$ ,  $2BC=AC$ ,  $AC=CD$  y E es el punto medio CD. Hallar la medida del ángulo ADB.

**PROBLEMA 4:**

Encontrar todas las soluciones enteras  $(x, y)$  tales que  $xy + 3x + 5y = 200$ .

**PROBLEMA 5:**

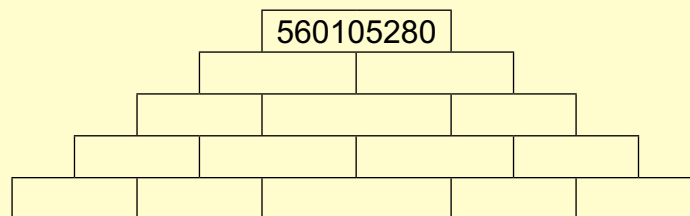
Encontrar todos los primos  $p$  tales que  $p^2 + 2$  es primo.

**PRIMER AÑO DE BACHILLERATO****PROBLEMA 1:**

En el rectángulo ABCD existe un punto P sobre el lado AB tal que los ángulos PDA, BDP, CDB son iguales y  $DA=2$ . Encontrar el perímetro del triángulo PBD.

**PROBLEMA 2:**

Escribir en cada una de las casillas vacías de la pirámide siguiente un número natural mayor que 1, de modo que: el número escrito en cada casilla sea igual al producto de los números escritos en las dos casillas sobre las que está apoyada.

**PROBLEMA 3:**

¿De cuántas formas se pueden elegir siete números del 1 al 9 de tal manera que al sumarlos el resultado sea un múltiplo de 3?

**PROBLEMA 4:**

Simplificar el producto

$$p = (10 + 1)(10^2 + 1)((10^2)^2 + 1)((10^2)^4 + 1)((10^2)^8 + 1) \dots ((10^2)^{1024} + 1).$$

**PROBLEMA 5:**

Un *punto reticular* es un punto en el plano cartesiano con coordenadas enteras. Se seleccionan al azar cinco puntos reticulares. Demostrar que existen dos de ellos que forman un segmento de recta cuyo punto medio es también un punto reticular.