IX OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EL SALVADOR 2009

MINED
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE EL SALVADOR

Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO A PARTICIPAR EN LA IX OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA.

✎ DE LA PRUEBA

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2009 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado inferior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado inferior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica de que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente en los gráficos.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpíada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- **Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas**.

✎ PROCEDIMIENTO DE PARTICIPACIÓN EN LA NOVENA OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA.

El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del **8 al 16 febrero** y entregar las soluciones en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día martes **17 de febrero**, a las 3:00 p.m.

Las soluciones e información pertinentes deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, que contendrá en la carátula y en una página dentro del mismo todos los datos del estudiante. Este será revisado para determinar el total de problemas resueltos y será sellado y firmado por la persona responsable del MINED, quien entregará constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto.

✎ EL ESTUDIANTE DEBERÁ PRESENTAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Primer nombre, segundo nombre, primer apellido, segundo apellido, fecha de nacimiento: día, mes y año; grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector(urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono.

Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: Nombre, modalidad (público, privado), dirección, teléfono, profesor responsable: dirección y teléfono.

✎ ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial** el día 7 de marzo del presente año, para lo cual los concursantes clasificados serán notificados directamente. **Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**

El día de la prueba el estudiante convocado deberá entregar una fotocopia de la libreta de notas correspondiente al grado cursado el año 2008. Este mismo día se realizará una prueba psicológica, por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde la ocho y media de la mañana hasta las cuatro de la tarde.

✎ INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador y el Center for the Advancement of Hispanics in Science and Engineering Education, con sede en Washington D.C.

El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos y el de inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, de desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso de **Futuros Dirigentes Técnico Científicos**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de cuatro semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpíadas internacionales de Matemática, Física y Química.

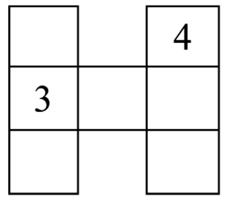
La Academia Sabatina se inaugurará el sábado 21 de marzo e iniciará actividades el sábado 28 de marzo. Los mejores estudiantes de la Academia Sabatina participan en el curso de Futuros Dirigentes Técnico Científicos en el que se imparten materias de nivel universitario, relacionadas con ciencia y tecnología modernas, con la intención de enseñar al alumno a pensar en términos científicos y técnicos, promoviendo en ellos el liderazgo en tales campos.

Los Cursos de Preparación de Maestros de Educación Básica y Media también iniciaran el 28 de marzo. Estos cursos se desarrollaran en paralelo con la Academia Sabatina.

PRUEBA DE CUARTO GRADO

Problema 1.

Acomode los números del 1 al 7 que faltan en la figura, de modo que la suma de los números en cada una de las líneas sea la misma (son tres líneas, una horizontal y dos verticales). ¿Qué números pueden ocupar la casilla del centro?



Problema 2.

Observe la operación ☺

208☺49 = (2 + 0 + 8) x (4 + 9) = 130

36 ☺608 = (3 + 6) x (6 + 0 + 8)=126

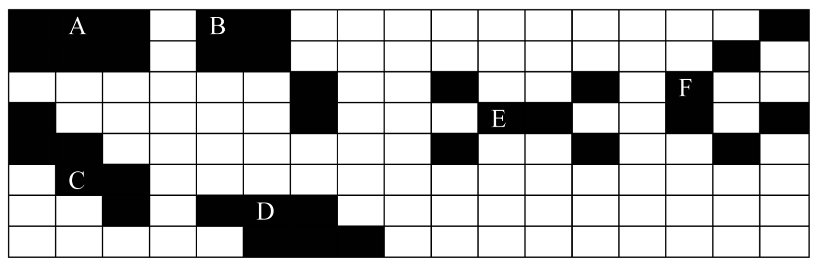
Encuentre todos los números menores que 100 que pueden ir en ☐ para que ☐☺2009 = 33

Problema 3.

Las figuras A, B, C, D, E, F que aparecen en el cuadro siguiente están formadas por 6 cuadrados.

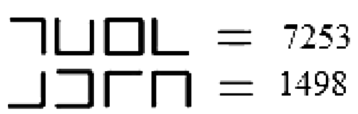
a) ¿Cuál de las figuras tiene menor perímetro?

b) ¿Cuál figura tiene mayor perímetro?

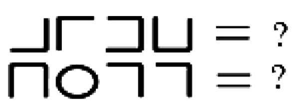


Problema 4.

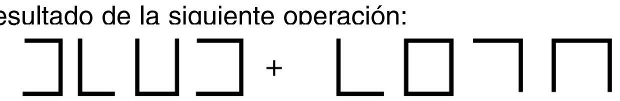
Sabiendo que:



Encuentre los siguientes números

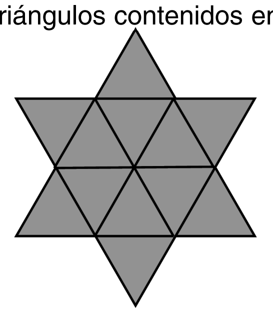


y calcule el resultado de la siguiente operación:

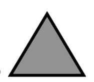


Problema 5.

Observe todos los posibles triángulos contenidos en la estrella:



a) ¿Cuántos triángulos tienen área igual a la tercera parte del área de la estrella?

b) Si el área de este triángulo  es 1, ¿cuántos triángulos contenidos en la estrella tienen área igual a 9?

PRUEBA DE QUINTO GRADO

Problema 1.

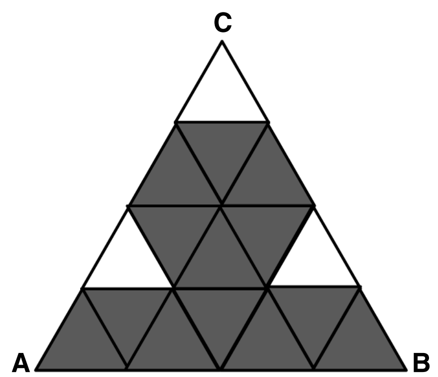
María juega tenis y practica natación. Juega tenis todos los jueves y practica natación cada tres días (un día sí y los dos días siguientes no). Hoy es jueves y María practicó los dos deportes. ¿Después de cuántos días, a partir de hoy, María volverá a practicar los dos deportes en el mismo día?

Problema 2.

Ana compró un libro de cuentos, una novela y un diccionario por $ 113. Si compraba sólo el libro de cuentos y el diccionario pagaba $ 81. Además se sabe que el diccionario costó el doble que el libro de cuentos. ¿Cuánto pagó por cada uno?

Problema 3.

El triángulo equilátero de vértices A, B y C, está dividido en 16 triangulitos equiláteros iguales, como muestra la figura:



Para bordear la parte sombreada se necesitan 104cm de cinta. ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?

Problema 4.

Con los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, sin repetir, se arman todos los números pares de cuatro cifras, mayores que 4500. ¿Cuántos son? Explique cómo los obtuvo.

Problema 5.

Pamela fue escribiendo en un tablero de 95 por 95 los múltiplos positivos de 4, en orden creciente, conforme la figura siguiente:

4	8	12	16	20	…	376	380
760	756	752	748	744	…	388	384
764	→	→	→	→	…	→	→
←	←	←	←	←	…	←	←
⋮	⋮				…		⋮
					…		P

¿Cuál es el número que Pamela escribió en la casilla señalada con la letra P?

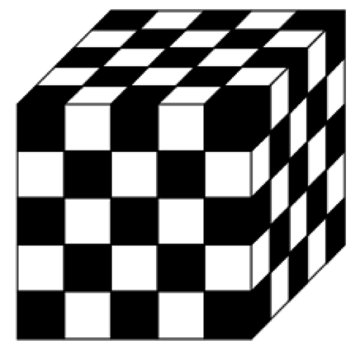
PRUEBA DE SEXTO GRADO

Problema 1.

Hay 10 huevos repartidos en tres canastos, uno amarillo, uno blanco y otro café. En el amarillo hay un huevo más que en el blanco. El blanco tiene tres huevos menos que el café. ¿Cuántos huevos hay en cada canasto?

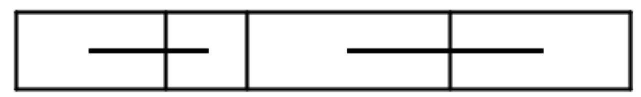
Problema 2.

El siguiente cubo se formó usando 125 cubitos, algunos blancos y otros negros. Se pusieron de modo que dos cubitos del mismo color nunca pudieran estar uno a la par del otro. Las esquinas del cubo grande son cubitos negros. ¿Cuántos cubitos blancos hay?



Problema 3.

Federica tenía una tira de papel rectangular de 27cm de largo. La dividió en cuatro rectángulos de diferentes tamaños y dibujó dos segmentos uniendo los centros de dos rectángulos que estuvieran a la par, como muestra la figura. ¿Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos?



Problema 4.

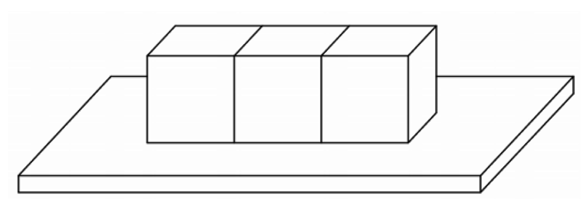
Ana, Beatriz y Cecilia son tres amigas que almuerzan juntas cada viernes. Para acompañar la comida siempre piden horchata o limonada. Sabemos que:

- Cuando Ana pide horchata, Beatriz pide lo mismo que Cecilia.
- Cuando Beatriz pide horchata, Ana pide lo que no ha pedido Cecilia.
- Cuando Cecilia pide limonada, Ana pide lo mismo que Beatriz.

¿Cuál de las tres pide siempre lo mismo de tomar? ¿Por qué?

Problema 5.

En un dado común y corriente la suma de los números de las caras opuestas siempre es 7. Paulo tiene tres de estos dados y los une con "pega loca", de modo que las caras pegadas tengan el mismo número. Después de esto, coloca su figura sobre una mesa no transparente, como se ve en el dibujo. La suma de los números en las once caras visibles es 36. ¿Cuál es la suma de los números de las caras que están en contacto con la mesa?



PRUEBA DE SÉPTIMO GRADO

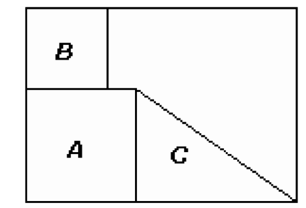
Problema 1.

Los números en una calculadora se escriben utilizando pequeños segmentos, como muestra la figura:

Por ejemplo, para escribir 17 se utilizan exactamente 5 segmentos. ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse con exactamente 12 segmentos?

Problema 2.

Una hoja rectangular se corta en cuatro partes, como se muestra a continuación. Si A es un cuadrado de área 144cm^2, B es un cuadrado de área 81cm^2 y C tiene 102cm^2 de área, ¿cuál es el área del pedazo que sobra?

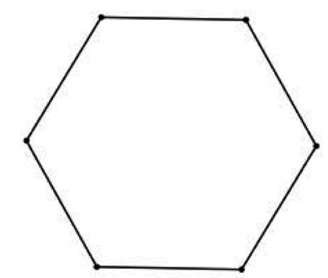


Problema 3.

Un tanque estaba lleno de agua. El lunes se gastaron $\frac{7}{8}$ del agua del tanque. El martes se agregaron 75 litros y entonces quedaron llenas las tres cuartas partes del tanque. ¿Cuántos litros caben en el tanque?

Problema 4.

Juan y Pedro ponen 1 ó 2 en los vértices de un hexágono regular, como el de la figura. Cada uno en su turno pone un 1 ó un 2, a su elección. Después de seis jugadas, cuando el juego termina, un árbitro pone en cada lado del hexágono el producto de los números de los dos vértices, luego suma los doce números escritos. Si la suma es impar, gana Juan; si es par, gana Pedro. Uno de los dos puede ganar siempre, no importa lo bien que juegue el otro. Si empieza Juan, ¿quién gana y cuál es su estrategia ganadora?



Problema 5.

Se construye un triángulo aritmético de la siguiente manera:

- En la primera fila se escriben los números del 0 al 500.
- A partir de la segunda fila cada número es la suma de dos consecutivos de la fila anterior, como muestra la figura.
- Este proceso se repite hasta que en una fila aparece un único número.

0 1 2 3 4 ... 498 499 500

1 3 5 7 ... ... 997 999

4 8 12 ... 1996

...

Argumente por qué el último número es múltiplo de 500.

IX OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EL SALVADOR 2009

MINED MINISTERIO DE EDUCACIÓN GOBIERNO DE EL SALVADOR

Universidad de El Salvador
Hacia la libertad por la cultura

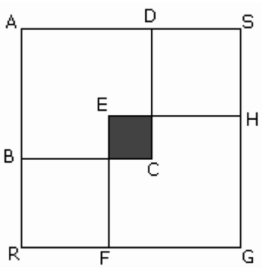
PRUEBA DE OCTAVO GRADO

Problema 1.

Un fabricante de juegos empaca pelotas de ping-pong en dos tipos de cajas. En un tipo puede colocar 10 pelotas y en el otro 24. Si un día se empacaron 198 pelotas y se usaron más de 10 cajas, ¿cuántas cajas fueron empacadas ese día?

Problema 2.

Los cuadrados ABCD y EFGH son iguales, y el área del cuadrado sombreado es $\frac{1}{9}$ del área de ABCD. Si el cuadrado sombreado tiene 49cm^2, ¿cuál es el área del cuadrado ARGS?



Problema 3.

¿Cuántas de las 71 fracciones $\frac{1}{72}, \frac{2}{72}, \frac{3}{72}, \ldots, \frac{70}{72}, \frac{71}{72}$ son irreducibles? (Una fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible si p y q no tienen factores en común mayores que 1).

Problema 4.

Dos matemáticos, Eva y Alfonso, paseaban por la calle cuando Eva le preguntó a su colega Alfonso:

-¿Tiene hijos?

-Sí, tengo tres.

-¿Cuántos años tienen?

-El producto de sus edades es 36 y la suma de sus edades es igual al número de la casa de enfrente.

Eva se quedó pensando y después de mirar el número de la casa de enfrente dijo a Alfonso:

-Me falta un dato.

-Es cierto, mi único hijo mayor se llama Alfonso como yo.

De este modo Eva ya pudo determinar sus edades. Determine las edades de los tres hijos de Alfonso.

Problema 5.

La policía investiga a tres sospechosos de robo. Uno dice dos mentiras, otro una verdad y una mentira, y el otro dos verdades. **A** dijo: no soy ladrón y el ladrón es **C**. **B** dijo: **C** es inocente y **A** es un ladrón. **C** dijo: no soy ladrón y **B** es inocente. Si sólo hay un ladrón, ¿quién es? Justifique su respuesta.

PRUEBA DE NOVENO GRADO

Problema 1.

Escriba en el siguiente tablero un entero distinto de 0 en cada una de las seis casillas vacías, de modo que el tablero completo sea un cuadrado mágico multiplicativo. Un cuadrado mágico multiplicativo es aquel en el cual al multiplicar los tres números de cada fila, columna o diagonal el resultado es el mismo.

	9	5
1		

Problema 2.

Sea a >1 el menor número entero tal que:

$$b = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{a}}}}}$$

es un número entero. Encuentre b.

Problema 3.

Arturo eligió tres dígitos distintos, diferentes de cero, y formó con ellos seis números de tres cifras distintas. El promedio de estos seis números es un natural terminado en 5. Determine todos los posibles tres dígitos que eligió Arturo.

Problema 4.

En cierta ciudad hay sólo dos clases de habitantes, los honestos que siempre dicen la verdad, y los mentirosos, que siempre mienten. Un viajero llega a la ciudad y se encuentra con cuatro habitantes: **A, B, C, D**. El habitante **A** le dice: "Exactamente uno de nosotros cuatro es mentiroso". El habitante **B** le dice: "Nosotros cuatro somos mentirosos". A continuación, el viajero le preguntó a **C**: "¿Es **A** mentiroso?". Recibió una respuesta (sí o no) de la que le resultó imposible determinar qué clase de habitante era **A**. Determine si **D** es honesto o mentiroso.

Problema 5.

Dada una semicircunferencia de diámetro AB=4 y centro O, sean M y N los puntos medios de OA y OB, y C un punto cualquiera de la semicircunferencia. Demuestre que CM²+CN²=10.

PRUEBA DE PRIMER AÑO DE BACHILLERATO

Problema 1.

Un rey, su hija y su hijo estaban encerrados en lo alto de una torre. El monarca pesaba 91Kg, la hija 42Kg y el hijo 49Kg. Disponían de una polea con una cuerda que llegaba exactamente desde lo alto de la torre hasta el suelo con un cesto a cada extremo, y además disponían de una enorme roca de 35Kg ¿Cómo se las arreglaron para bajar, si la diferencia de peso entre los dos cestos no podía ser mayor de 7Kg porque sino la cuerda se rompía?

Problema 2.

Con tres dígitos distintos se forman seis números de tres cifras distintas. Si se suman estos seis números el resultado es 4218. La suma de los tres números más grandes menos la suma de los tres más pequeños es igual a 792. Hallar los tres dígitos.

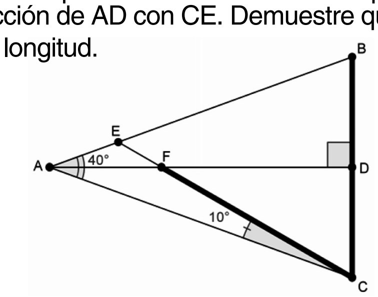
Problema 3.

Sea a_n (n es natural) el dígito de las unidades de $2009^1 + 2009^2 + \ldots + 2009^{n^2}$.

Determine la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

Problema 4.

Considere la siguiente figura. ABC es un triángulo tal que los lados AB y AC tienen igual longitud y el ángulo en A es igual a 40°. D es un punto sobre el lado BC tal que AD es altura; E es un punto sobre el lado AB tal que el ángulo ACE es igual a 10°; F es la intersección de AD con CE. Demuestre que los segmentos de recta CF y BC tienen igual longitud.



Problema 5.

Determine los valores de *n* (natural) menores o iguales a 100 para los cuales la siguiente expresión es un número natural.

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}$$