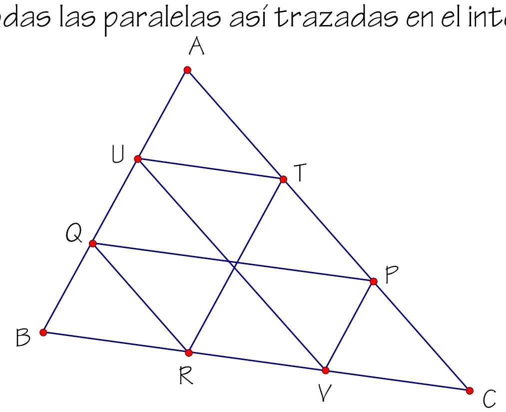
CUARTA OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS EL SALVADOR 2004

PRUEBA DEL PERIÓDICO

PRIMER NIVEL

PROBLEMA 1.
Diremos que un número racional es irreducible cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes mayores que 1. Hallar la suma de todos los números racionales positivos irreducibles menores que 10 que tengan denominador 12.

PROBLEMA 2.
En el triángulo ABC del diagrama AB = 27, BC = 26 y CA = 41. El punto P se encuentra sobre el lado CA y CP= 15. Por el punto P trazamos una recta paralela al lado BC que corta el lado AB en el punto Q, luego, por el punto Q trazamos una recta paralela al lado AC que corta el lado BC en R y repetimos este procedimiento hasta volver al punto P.
Hallar la suma de las longitudes de todas las paralelas así trazadas en el interior de triángulo.



PROBLEMA 3.
Se arreglan los números naturales consecutivos en columnas, uno en la primera columna, tres en la segunda, cinco en la tercera y así sucesivamente, tal como se aprecia en el diagrama.
¿Cuál es la suma de todos los números que están en la misma columna en la que aparece 2004?

			10
		5	11
	2	6	12
1	3	7	13
	4	8	14
		9	15
			16

PROBLEMA 4.

En una convención de 20 personas, de las personas asistentes se tiene la siguiente información:

a) Existe al menos una mujer guapa.
b) En toda posible pareja de personas que puede formarse, existe por los menos un hombre.

De todas las posibles parejas de personas ¿En cuántas de ellas no hay una mujer guapa?

PROBLEMA 5.

Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 2004 centímetros. Por uno de los puntos donde se cortan las circunferencias, que llamaremos O, trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide el segmento MN ?

SEGUNDO NIVEL

PROBLEMA 1

Se tienen grupo de cinco pedacitos de papel, se toma uno o más de estos pedacitos, y cada uno se corta en cinco pedacitos más pequeños, se obtiene un nuevo grupo (que consta de todos los pedacitos de papel que se han cortado y los que no), otra vez se toma uno o más pedacitos, y se repite este proceso sucesivamente. Probar que nunca se obtendrá 2004 pedacitos de papel.

PROBLEMA 2

Se dice que un número natural es ascendente si cada uno de sus dígitos es estrictamente mayor que todos sus dígitos colocados a su izquierda. Por ejemplo, el número 3589 es ascendente. ¿Cuántos números ascendentes existen entre 2000 y 5000?

PROBLEMA 3

Sea a_1 el dígito de las unidades de 2004^1, a_2 el dígito de las unidades de $2004^1 + 2004^3$, a_3 el dígito de las unidades de $2004^1 + 2004^3 + 2004^5$, y así sucesivamente, de manera general, a_n es el dígito de las unidades de la suma de las primeras n potencias impares de 2004, es decir, el dígito de las unidades de $2004^1 + 2004^3 + ... + 2004^{2n-1}$.

Calcular la suma $a_1 + a_2 + ... + a_{2004}$.

PROBLEMA 4

Un examen tiene veinte preguntas, son atribuidos 7 puntos por cada respuesta correcta, se restan 2 puntos por cada respuesta incorrecta, y no se suman ni se restan puntos por cada pregunta no respondida. Si Ana obtuvo 87 puntos, ¿cuántas preguntas no respondió?

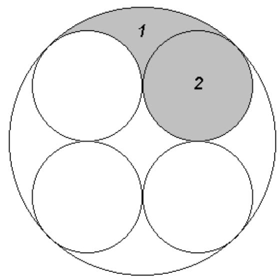
PROBLEMA 5

El triángulo ABC tiene área 1 y sus lados AB, BC y AC han sido divididos respectivamente en 3, 3 y 4 partes iguales. Determinar el área del cuadrilátero DEFG.

TERCER NIVEL

PROBLEMA 1.

En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1, interiores y tangentes al círculo más grande. ¿Cuál es la suma de las áreas de las regiones 1 y 2 sombreadas?



PROBLEMA 2.

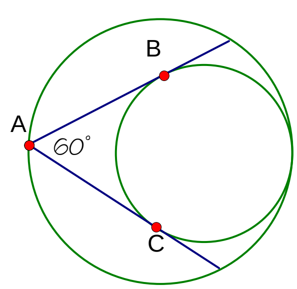
Ana ha decidido salir a caminar exactamente un kilómetro cada día. Vive en una ciudad cuadriculada de 5km x 5km, en la que cada cuadra mide 100m y su casa está en una esquina del centro. ¿Durante cuántos días puede hacer recorridos distintos, si siempre empieza los recorridos saliendo de su casa y terminando también en ella, pero sin pasar dos veces por un mismo punto en el recorrido de cada día?. (NOTA: Recorridos de días distintos pueden tener partes en común e inclusive determinar el mismo camino pero en sentido contrario).

PROBLEMA 3

Determinar el entero n más pequeño, $n \geq 4$, para el cual podemos asegurar que de n cualesquiera enteros diferentes es posible seleccionar cuatro de ellos a, b, c, d que tengan la propiedad de que el valor de la expresión $a+b-c-d$ sea divisible por 20.

PROBLEMA 4

En la figura, el área del círculo mayor es 1 m^2. El círculo menor es tangente a la primera circunferencia y a los lados del ángulo inscrito que mide 60º. ¿Cuál es el área del círculo menor?



PROBLEMA 5

Encontrar todos los enteros que son la suma de los cuadrados de sus cuatro divisores positivos más pequeños.